RECHENVERFAHREN

für Technische PhysikerInnen

Technische Universität Wien

Gabriela Schranz-Kirlinger
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

1.Teil

Oktober 2002

Vorwort

Diese Lehrveranstaltung ist ein Teil der mathematischen Grundausbildung für Studierende der Technischen Physik an der TU Wien. An diese Ausbildung gibt es zwei nur sehr schwer zu vereinbarende Anforderungen. Einerseits sollen die in der gleichzeitig stattfindenden Grundvorlesung Physik verwendeten *mathematischen Konzepte rechtzeitig vermittelt* werden, anderseits soll die *Mathematik als eigenständiges, deduktiv aus Axiomen aufgebautes Theoriegebäude* kennengelernt werden.

Der gewählte Weg besteht nun darin, den mathematischen Stoff auf zwei Gruppen von Lehrveranstaltungen aufzuteilen, die nach den oben genannten Anforderungen ausgerichtet sind, d.h. eine Gruppe von Lehrveranstaltungen ist so gestaltet, dass die in der Physik verwendeten mathematischen Konzepte rechtzeitig behandelt werden. Es muss dabei allerdings auf einen streng deduktiven Aufbau verzichtet werden. Dazu zählen die Lehrveranstaltungen **Rechenverfahren für TPH** und **Praktische Mathematik 1 und 2 für TPH**. In **Lineare Algebra für TPH** und **Analysis I und II für TPH** wird anhand einiger grundlegender Konzepte der Analysis und Algebra vermittelt wie ein streng deduktiver Aufbau der Mathematik erfolgt.

Bermerkungen zum Skriptum **Rechenverfahren für TPH**:
Der mathematische Kernstoff ist hervorgehoben und mit den Begriffen **Definition** und **Satz** gekennzeichnet. In einem streng deduktiven Aufbau müßte man darauf achten, dass in Definitionen nur Begriffe verwendet werden, die entweder aus einem zugrundeliegenden Axiomensystem oder aus früheren Definitionen stammen. Sätze sind im Rahmen der formalen Logik aus Axiomen und Definitionen herleitbare Aussagen, d.h. in einem deduktiven Aufbau muss jeder Satz von einem entsprechenden **Beweis** begleitet sein. Das vorliegende Skriptum genügt diesen strengen Kriterien nicht. Trotzdem sind die angeführten Sätze und Definitionen insofern mathematisch korrekt, als sie durch entsprechende Ergänzungen den obigen Kriterien entsprechend vervollständigt werden können. Für einige wichtige, ohne Erklärung verwendete Grundbegriffe, wird auf die Vorlesung **Analysis I** verwiesen.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Differentialrechnung

1.1 Reelle Funktionen

Reelle Funktionen sind Abbildungen der Zahlengerade in die Zahlengerade:

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R},$$

wobei A der *Definitionsbereich* und B der *Bildbereich* der Funktion f sind. Man schreibt $x \mapsto f(x), \quad y = f(x)$. Die Elemente von A heißen *Argumente*, *Urbilder* von f. Ein Element $y \in B$ mit $y = f(x)$ für $x \in A$ heißt *Bild* von x unter f oder *Funktionswert* von f an der Stelle x. Der *Wertebereich* oder das *Bild* der Funktion f ist$W_f := \{y \in B : \exists x \in A, \ x \mapsto y = f(x)\} = \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$. Im Fall $W_f = B$ sagt man die Abbildung ist *auf* B , im Fall $W_f \subset B$ sagt man die Abbildung ist *in* B. Die Menge $G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt der *Graph* der Funktion $f(x)$.

Beispiel: $f : [-2, 4) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x < \frac{1}{2} \\ 3, & x = \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} - x, & \frac{1}{2} < x < 4 \end{cases} .$$

Hier gilt also: $A = [-2, 4)$, $W_f = (-1.5, 2) \cup \{3\}$.

Zwei Funktionen $f : A \to B$, $g : A \to B$ heißen *gleich* (in Zeichen: $f = g$), wenn $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$.

Definition 1.1.1: *Es seien $g : A \to B$ und $f : C \to D$ zwei Funktionen, und es gelte $W_g \subseteq C$. Dann ist durch*

$$x \mapsto f(g(x)) \quad \textit{für } x \in A$$

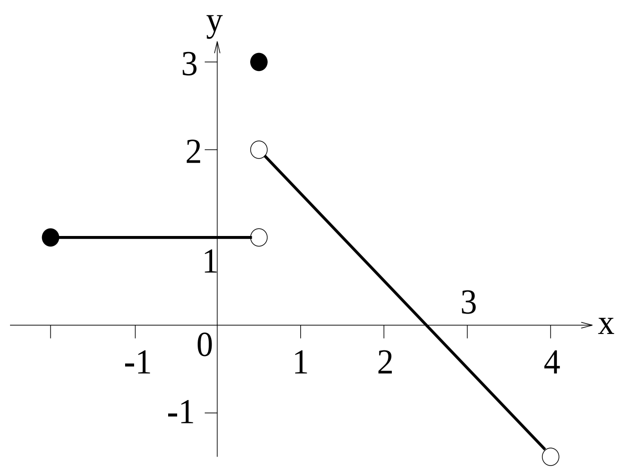

Abbildung 1.1: Graph des obigen Beispiels

eine Funktion von A nach D definiert. Sie heißt Komposition *von f und g.*

Bemerkung: Man spricht auch von einer *Zusammensetzung* oder *Schachtelung* der Funktionen. Dabei ist g die *innere* und f die *äußere* Funktion.

Sprechweise: „f von g", „f angewandt auf g".
Damit die Komposition definiert ist, muß gelten $W_g \subseteq C$. Diese Bedingung ist im Fall $B = C$ immer erfüllt.

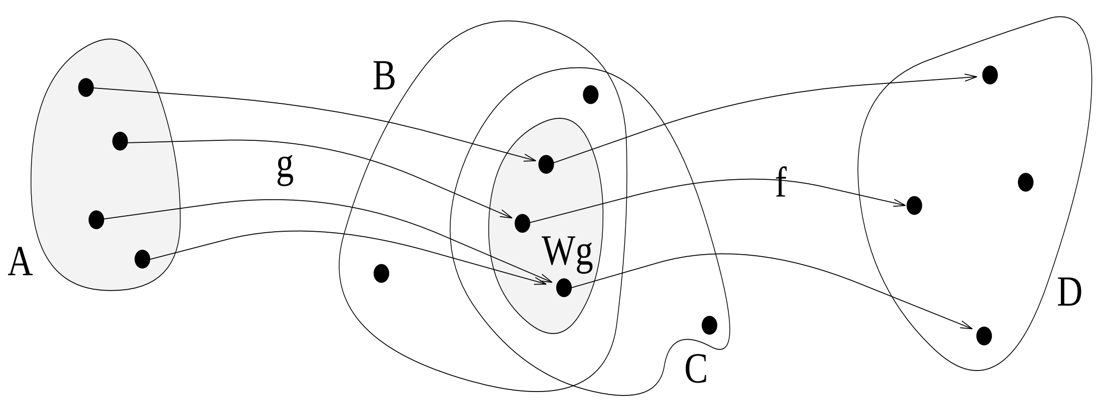

Abbildung 1.2: Komposition von Funktionen

Beispiel: $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$; $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\Big(\frac{1}{x}\Big) = 2\frac{1}{x} - 1 = \frac{2 - x}{x}.$$

Jedoch $g \circ f$ ist nicht definiert, denn $W_f \not\subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für $x = \frac{1}{2}$ gilt ja $f(x) = 0$.

1.1.1 Die Umkehrfunktion

Eine bijektive Funktion $f : A \to B$ besitzt eine eine *Umkehrfunktion* oder *inverse Funktion*

$$f^{-1} : B \to A,$$

die durch $f^{-1}(y) := x$, genau dann, wenn $y = f(x)$ definiert ist.

Beispiel: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x - 3$ ist bijektiv.

Bestimmung der Umkehrfunktion: $y = 2x - 3 \Leftrightarrow x = \frac{y+3}{2}$, Daher gilt:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \frac{y+3}{2}\ .$$

Die Bezeichnung der Variablen mit y ist aber nicht zwingend. Bei Verwendung von x als Argument erhalten wir das Funktionenpaar:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto= 2x - 3,$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x+3}{2}\ .$$

Für eine Funktion f und ihre Umkehrfunktion f^{-1} gilt stets

$$f^{-1} \circ f = id, \quad f \circ f^{-1} = id.$$

Der Graph der Umkehrfunktion

Für die graphische Darstellung der Umkehrfunktion einer reellen Funktion nehmen wir an:

$$f : A = [a, b] \to B = [f(a), f(b)]\ .$$

Der Graph der Umkehrfunktion ensteht durch Spiegelung des Graphen von f an der 1. Mediane (das ist die Gerade $y = x$) in der (x, y) - Ebene.

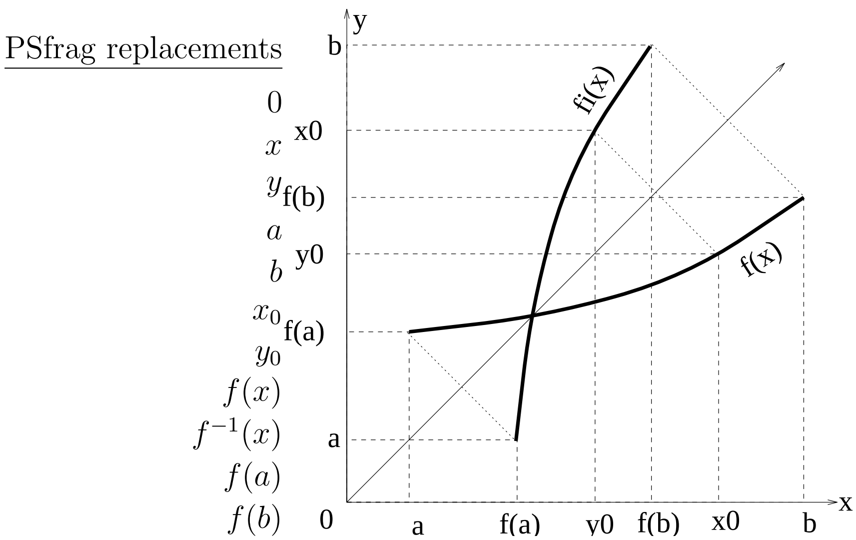

Abbildung 1.3: Graph der Umkehrfunktion

Im Fall einer Funktion, die nicht bijektiv ist, kann man oft Teile des Definitionsbereichs und des Wertebereichs finden, auf denen die (Einschränkung der) Funktion bijektiv ist und daher eine Umkehrfunktion besitzt. Falls die ursprüngliche Funktion nicht injektiv ist, erhält man so mehrere *Zweige* der Umkehrfunktion.

Beispiel: Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x-2)^2 + 1$ ist weder surjektiv noch injektiv.

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to [1, \infty)$, $x \mapsto (x-2)^2 + 1$ ist surjektiv aber nicht injektiv. Durch zerlegen des Definitionsbereiches $\mathbb{R} = (-\infty, 2] \cup [2, \infty)$ erhält man zwei bijektive Funktionen:

$$f_1 : D_1 = (-\infty, 2] \to [1, \infty), \quad x \mapsto (x-2)^2 + 1,$$

$$f_2 : D_2 = [2, \infty) \to [1, \infty), \quad x \mapsto (x-2)^2 + 1,$$

die jeweils eine Umkehrfunktion besitzen.

Aus $(x-2)^2 + 1 = y$, folgt $x = 2 \pm \sqrt{y-1}$. Daher sind

$$f_1^{-1} : [1, \infty) \to (-\infty, 2], \quad x \mapsto 2 - \sqrt{x-1},$$

und

$$f_2^{-1} : [1, \infty) \to [2, \infty), \quad x \mapsto 2 + \sqrt{x-1}$$

die zwei Zweige der Umkehrfunktion.

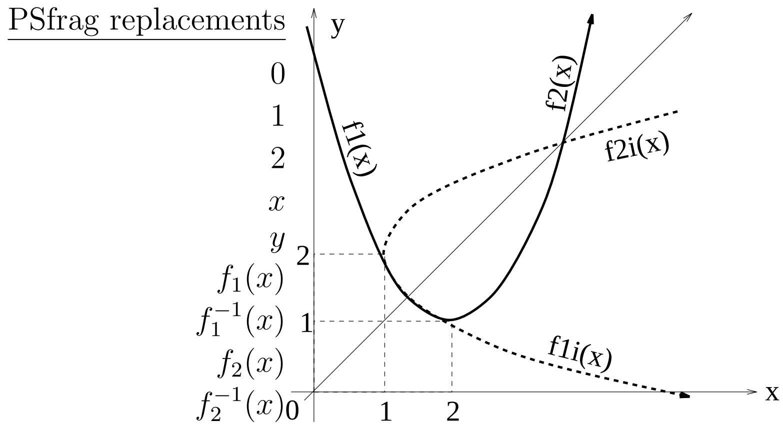

Abbildung 1.4: $f(x) = (x-2)^2 + 1$ und Zweige der Umkehrfunktion

1.2 Polynome

Ein Polynom ist eine Funktion der Bauart

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

Ein Polynom $p(x)$ heißt reelles Polynom, falls die Koeffizienten a_i, $i = 0, \ldots, n$ und das Argument x reell sind. Ein reelles Polynom ist eine Abbildung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Das Polynom $p(z)$ heißt komplexes Polynom, falls die Koeffizienten a_i, $i = 0, \ldots, n$ oder das Argument z komplexe Zahlen sind. Ein komplexes Polynom ist eine Abbildung $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Falls gilt $a_n \neq 0$, so hat das Polynom den Grad n, abgekürzt Grad$(p) = n$.

Eine Gleichung der Form $p(x) = 0$ heißt algebraische Gleichung n - ten Grades.

Die Nullstellen eines Polynoms

Es sei $a \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann gilt

$$p(x) - p(a) = a_1(x-a) + \cdots + a_{n-1}(x^{n-1} - a^{n-1}) + a_n(x^n - a^n) = (x-a)q(x),$$

wobei $q(x)$ ein Polynom vom Grad $n-1$ ist. Ist $p(a) = 0$, so heißt a *Nullstelle* oder *Wurzel* von $p(x)$. Dann ist $p(x) = (x-a)q(x)$, d.h. $p(x)$ ist durch den Linearfaktor $x - a$ teilbar, $x - a$ ist ein *Wurzelfaktor*.

Satz 1.2.1: *(Fundamentalsatz der Algebra, Gauß 1799): Jedes Polynom vom Grad* ≥ 1 *hat mindestens eine (reelle oder komplexe) Nullstelle.*

Folgerung: Ein Polynom vom Grad n hat stets genau n Nullstellen. Ist nämlich z_1 eine Nullstelle, so gilt nach obigem $p(x) = (x - x_1)q_{n-1}(x)$ mit $\text{Grad}(q_{n-1}) = n - 1$. Daher folgt $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)q_{n-2}(x)$ mit $\text{Grad}(q_{n-2}) = n - 2$. Man setzt so fort, bis man zu einem Polynom $q_0 = a_n$ vom Grad null kommt:

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

Diese Darstellung nennt man auch die *Produktdarstellung* von p. Die Nullstellen $x_1, \ldots, x_n$ sind nicht notwendigerweise verschieden. Bei geeigneter Numerierung gibt es dann r verschiedene $x_1, x_2, \ldots, x_r$ Nullstellen für ein $1 \leq r \leq n$, wobei der Linearfaktor $x - x_i$ in der Produktdarstellung n_i-mal vorkommt, $i = 1, \ldots, r$ mit $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$. Daher gilt

$$p(x) = a_n(x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2}\cdots(x - x_r)^{n_r}\ .$$

Die Zahl n_i heißt die *Ordnung* der Nullstelle x_i. Im Fall $n_i > 1$ spricht man von einer *mehrfachen Nullstelle*.

1.2.1 Die Nullstellen reeller Polynome

Für reelle Polynome gilt: Hat das reelle Polynom $p(x)$ die komplexe Nullstelle $z = \eta + i\xi$, $\xi \neq 0$, so ist auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z} = \eta - i\xi$ Nullstelle, d.h.

$$p(\eta + i\xi) = 0 \Leftrightarrow p(\eta - i\xi) = 0.$$

Beweis: $p(\overline{z}) = \sum_{i=0}^{n} a_i\overline{z}^i = \sum_{i=0}^{n}\overline{a_i z^i} = \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i z^i} = \overline{p(z)} = 0.$ □

Folgerung: Ein reelles Polynom hat immer eine gerade Anzahl komplexer Nullstellen, wobei die Nullstellen in konjugiert komplexen Paaren auftreten. Ein Polynom von ungeradem Grad hat daher eine ungerade Anzahl reeller Nullstellen, also mindestens eine.

Es seien $z_1 = \eta + i\xi$, $z_2 = \eta - i\xi$ ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen. Dann ist

$$(x - z_1)(x - z_2) = (x - (\eta + i\xi))(x - (\eta - i\xi)) = x^2 - 2\eta x + \eta^2 + \xi^2$$

ein reelles (irreduzibles) quadratisches Polynom. Jedes reelle Polynom kann daher als Produkt von reellen linearen und quadratischen Faktoren angeschrieben werden (reelle Faktorisierung).

1.2.2 Das Horner - Schema

Polynomauswertung mittels n Additionen und Multiplikationen

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-2} + x(a_{n-1} + xa_n))\cdots)).$$

Auswertung von der innersten Klammer führt auf das Schema

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \hline x & a_n & xb_{n-1} + a_{n-1} & xb_{n-2} + a_{n-2} & \cdots & xb_1 + a_1 & xb_0 + a_0 \\ & \| & \| & \| & & \| & \| \\ & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & p(x) \end{array}$$

Die Division eines Polynoms durch einen Linearfaktor

Aus

$$p(x) - p(a) = (x - a)q(x)$$

folgt $p(x) = (x-a)q(x)+p(a)$, d.h. $p(a)$ ist der Rest bei der Division $p(x) : (x-a)$. Mit

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

und dem Ansatz

$$q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-3}x^{n-3} + b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-1}$$

erhält man

$$\begin{aligned} (x-a)q(x) + p(a) \quad = \quad & b_0x + b_1x^2 + \cdots + b_{n-3}x^{n-2} + b_{n-2}x^{n-1} + b_{n-1}x^n - \\ & -ab_0 - ab_1x - \cdots - ab_{n-2}x^{n-2} - ab_{n-1}x^{n-1} + p(a). \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$a_n = b_{n-1},\ a_{n-1} = b_{n-2} - ab_{n-1},\ \ldots,\ a_1 = b_0 - ab_1,\ a_0 = -ab_0 + p(a)$$

oder umgekehrt:

$$b_{n-1} = a_n,\ b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1},\ \ldots,\ b_0 = a_1 + ab_1,\ p(a) = a_0 + ab_0\ .$$

Damit haben wir gezeigt, daß gilt: Die Zahlen b_i, $i = 1, \ldots, (n-1)$ im Horner - Schema sind genau die Koeffizienten von $q(x)$.

Beispiel: $(x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 19x - 14) : (x - 2)$.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -2 & -6 & 19 & -14 \\ \hline 2 & 1 & 0 & -6 & 7 & 0 \end{array}$$

Daher gilt: $p(2) = 0$, $p(x) = q(x) \cdot (x - 2)$ mit $q(x) = x^3 + 0x^2 - 6x + 7$.

1.2.3 Algebraische Gleichungen

Eine algebraische Gleichung n - ten Grades hat die Form

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = 0$$

Quadratische Gleichungen $(n = 2)$

$$p(x) = ax^2 + bx + c = 0. \quad a \neq 0.$$

Quadratische Erweiterung:

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}[(2ax+b)^2 + (4ac - b^2)].$$

Diskriminante $D := b^2 - 4ac$. Die quadratische Gleichung ist daher äquivalent zu

$$(2ax + b)^2 = D.$$

Lösungsformel:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{D}.$$

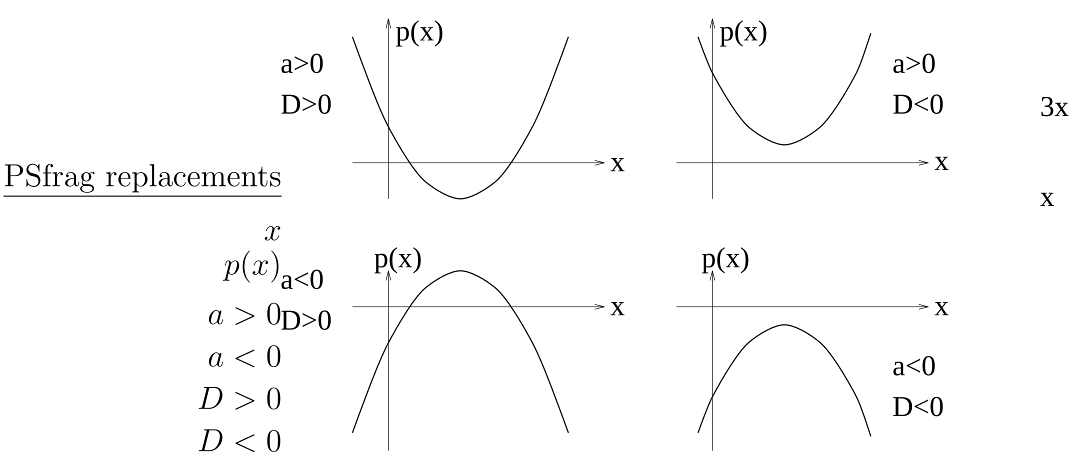

Abbildung 1.5: Lösungen der quadratischen Gleichung

Bemerkung: Für $D > 0$ gibt es zwei reelle Lösungen, für $D = 0$ gibt es eine reelle Nullstelle der Ordnung zwei und für $D < 0$ gibt es keine reelle Lösungen.

Gleichungen 3. und 4. Grades

Es existieren Lösungsformeln, die allerdings sehr kompliziert sind und daher nur wenig praktische Bedeutung haben.

Gleichungen mit Grad 5 oder größer

Die Nullstellen können i.a. nicht mehr durch Wurzelausdrücke beschrieben werden. Manchmal hilft folgender Satz beim Auffinden von Nullstellen.

Satz 1.2.2: *Sind die Koeffizienten in* $a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + 1x^n = 0$ *ganze Zahlen, dann sind alle eventuell vorhandenen rationalen Nullstellen ganzzahlig und Teiler von* a_0.

Bemerkung: Wenn man eine Nullstelle gefunden hat, kann man durch den entsprechenden Linearfaktor dividieren und so den Grad des noch zu untersuchenden Polynoms verringern.

Die praktische (eventuell auch numerische) Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms mit hohem Grad ist ein schwieriges Problem.

1.2.4 Rationale Funktionen

Definition 1.2.2: *Eine Funktion* $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, *wobei* $p(x)$ *und* $q(x)$ *Polynome sind, heißt* rationale Funktion. *Der* Definitionsbereich *von* $R(x)$ *ist die Menge* $D = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_r\}$, *wobei die* x_i, $i = 1, \ldots, r$ *die Nullstellen von* $q(x)$ *sind.*

Satz 1.2.3: *Für eine rationale Funktion* $R(x)$ *gilt:*

1. $R(x)$ *ist auf ganz* D *stetig.*

Die Partialbruchzerlegung von rationalen Funktionen

Es sei

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Im Fall $\text{Grad}(p) \geq \text{Grad}(q)$ bringt man $R(x)$ mittels Polynomdivision auf die Form

$$\frac{p(x)}{q(x)} = u(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

mit $\mathrm{Grad}(u) = \mathrm{Grad}(p) - \mathrm{Grad}(q), \quad \mathrm{Grad}(r) < \mathrm{Grad}(q).$

Beispiel: $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^2+x}{x-1}$, $\mathrm{Grad}(p) = 2$, $\mathrm{Grad}(q) = 1$.

$$\begin{array}{l}
(x^2 + x) : (x - 1) = x + 2 \\
\underline{x^2 - x} \\
\quad 2x \\
\quad \underline{2x - 2} \\
\qquad 2
\end{array}$$

Also ist $\frac{x^2+x}{x-1} = x + 2 + \frac{2}{x-1}$.

Wir können uns daher im weiteren auf rationale Funktionen der Form $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit $\mathrm{Grad}(q) > \mathrm{Grad}(p)$ beschränken. Für die reelle Faktorisierung des Nennerpolynoms $q(x)$

$$q(x) = a_n(x - \alpha_1)^{r_1} \cdots (x - \alpha_l)^{r_l} [(x - z_1)(x - \overline{z}_1)]^{s_1} \cdots [(x - z_m)(x - \overline{z}_m)]^{s_m}$$

gilt

$$\begin{aligned}
(x - z_j)(x - \overline{z}_j) &= (x - (\eta_j + i\xi_j))(x - (\eta_j - i\xi_j)) \\
&= (x^2 + 2\eta_j x + \eta_j^2 + \xi_j^2) \\
&= x^2 + \beta_j x + \gamma_j, \text{ mit } D = \beta_j^2 - 4\gamma_j < 0.
\end{aligned}$$

Das Polynom $q(x)$ hat daher die *eindeutige* reelle Faktorisierung:

$$q(x) = a_n \prod_{i=1}^{l} (x - \alpha_i)^{r_i} \prod_{i=1}^{m} (x^2 + \beta_i x + \gamma_i)^{s_i}.$$

Beispiel: $q(x) = (x^3 - x^2 - x + 1)$, $\frac{q(x)}{x-1} = x^2 - 1$, $q(x) = (x - 1)(x^2 - 1) = (x - 1)^2(x + 1)$.

Beispiel: $q(x) = x^4 + x^3 - 2x = x(x^3 + x^2 - 2) = x(x - 1)(x^2 + 2x + 2)$.

Definition 1.2.3: *Die* Partialbruchzerlegung *einer rationalen Funktion* $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ *mit* $\mathrm{Grad}(p) < \mathrm{Grad}(q)$ *ist eine Darstellung von* $R(x)$ *in der Form*

$$R(x) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{A_{i,j}}{(x - \alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{s_i} \frac{B_{i,j}x + C_{i,j}}{(x^2 + \beta_i x + \gamma_i)^j},$$

wobei zu jedem Faktor $(x - \alpha_i)^{r_i}$ *in der obigen Faktorisierung von* q *der Anteil*

$$\frac{A_{i,1}}{(x - \alpha_i)} + \frac{A_{i,2}}{(x - \alpha_i)^2} + \cdots + \frac{A_{i,r_i}}{(x - \alpha_i)^{r_i}}$$

gehört und zu jedem Faktor $(x^2+\beta_i x+\gamma_i)^{s_i}$ *der Anteil*

$$\frac{B_{i,1}x+C_{i,1}}{(x^2+\beta_i x+\gamma_i)}+\cdots+\frac{B_{i,s_i}x+C_{i,s_i}}{(x^2+\beta_i x+\gamma_i)^{s_i}}.$$

Satz 1.2.4: *Falls* $\mathrm{Grad}(p)<\mathrm{Grad}(q)$*, dann gibt es genau eine Partialbruchzerlegung.*

Beweis: Wir beweisen die Existenz der Koeffizienten A_{ij}, die den reellen Nullstellen von $q(x)$ entsprechen. Sei $q(x)=(x-t_1)^{r_1}f(x)$ mit $f(t_1)\neq 0$. Gesucht ist ein $A_{1r_1}=a$, so daß in

$$\frac{p(x)}{q(x)}-\frac{a}{(x-t_1)^{r_1}}$$

nach Kürzen der neue Nenner nicht mehr duch $(x-t_1)^{r_1}$ teilbar ist, d.h. die rationale Funktion

$$\frac{p(x)-af(x)}{q(x)}$$

muß durch $(x-t_1)$ kürzbar sein. Das ist genau dann der Fall, wenn $p(t_1)-af(t_1)=0$, d.h.

$$a=\frac{p(t_1)}{f(t_1)}.$$

Mit $A_{1r_1}=a$ gilt

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A_{1r_1}}{(x-t_1)^{r_1}}+\frac{p_1(x)}{q_1(x)}$$

mit $\mathrm{Grad}(p_1)=\mathrm{Grad}(p)-1$ und $\mathrm{Grad}(q_1)=\mathrm{Grad}(q)-1$. Das Nennerpolynom $q_1(x)$ hat eine (r_1-1) - fache Nullstelle bei t_1. Rekursives Anwenden dieses Schritts liefert die Koeffizienten A_{1i}, $i=1,\ldots,r_1$. Mit den anderen reellen und den paarweise konjugiert komplexen Nullstellen verfährt man analog.

Daher existiert eine Dastellung der gewünschten Art. Ihre Eindeutigkeit zeigt man, indem man annimmt, es gäbe zwei verschiedene Darstellungen, dann ihre Differenz bildet, auf gleichen Nenner bringt und die Nullstellen des Nenners in den Zähler einsetzt. □

Zur Bestimmung der Koeffizienten einer Partialbruchzerlegung gibt es zwei Möglichkeiten: 1) Koeffizientenvergleich, 2) Einsetzen von speziellen x-Werten.

Beispiel: Für

$$R(x)=\frac{2x^2+2x+1}{x^4+x^3-2x}\qquad\text{gilt}\qquad q(x)=x(x-1)(x^2+2x+2)\ .$$

Die Partialbruchzerlegung von $R(x)$ hat daher die Form

$$\frac{2x^2+2x+1}{x^4+x^3-2x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

mit zunächst unbekannten Koeffizienten A_1, A_2, B, C, die wir mittels Koeffizentenvergleich bestimmen:

$$\begin{aligned}
2x^2+2x+1 &= A_1(x-1)(x^2+2x+2) + A_2x(x^2+2x+2) + (Bx+C)x(x-1) \\
&= A_1(x^3+2x^2+2x-x^2-2x-2) + A_2(x^3+2x^2+2x) \\
&\quad +B(x^3-x^2) + C(x^2-x) \\
&= (A_1+A_2+B)x^3 + (A_1+2A_2-B+C)x^2 + (2A_2-C)x - 2A_1
\end{aligned}$$

1. $A_1 + A_2 + B = 0$
2. $A_1 + 2A_2 - B + C = 2$
3. $2A_2 - C = 2$
4. $\underline{-2A_1 = 1}$

$-\frac{1}{2} + 2(\frac{1}{2} - B) - B + C = 2$ und $2(\frac{1}{2} - B) - C = 2$. $A_1 = -\frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{1}{2} - B$, in (2) und (3) eingesetzt: $-3B + C = \frac{3}{2}$, $-2B - C = 1$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = 0$, $A_2 = 1$. Es folgt:

$$R(x) = \frac{2x^2+2x+1}{x^4+x^3-2x} = \frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}x}{x^2+2x+2}.$$

Beispiel: Für

$$R(x) = \frac{2x^2+x+1}{x^3+x^2-5x+3} \qquad \text{gilt} \qquad q(x) = (x-1)^2(x+3)\ .$$

Es folgt

$$R(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+3},$$

Man bringt auf gleichen Nenner und erhält die Gleichung

$$2x^2+x+1 = A_1(x-1)(x+3) + A_2(x+3) + A_3(x-1)^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}\ .$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten setzt man spezielle x-Werte ein, wobei die Wahl der Nullstellen des Nenners die Rechnung besonders vereinfacht:

$$\begin{aligned}
x = 1 &: \ 2+1+1 = 4A_2 \quad \Rightarrow \quad A_2 = 1, \\
x = -3 &: \ 16 = 16A_3 \quad \Rightarrow \quad A_3 = 1, \\
x = 0 &: \ 1 = -3A_1 + 3A_2 + A_3 = -3A_1 + 4 \quad \Rightarrow \quad A_1 = 1\ .
\end{aligned}$$

Daher gilt

$$R(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+3} \ .$$

Bemerkung: Man sollte das Ergebnis einer Partialbruchzerlegung immer mittels Probe überprüfen, was meist nur einen geringen Mehraufwand bedeutet.

1.3 Differenzenquotient und Ableitung

Gegeben ist eine Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Fragestellung: Welche Richtung hat die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x, f(x))$?
Lösung: Approximation der Tangente durch Sekanten.

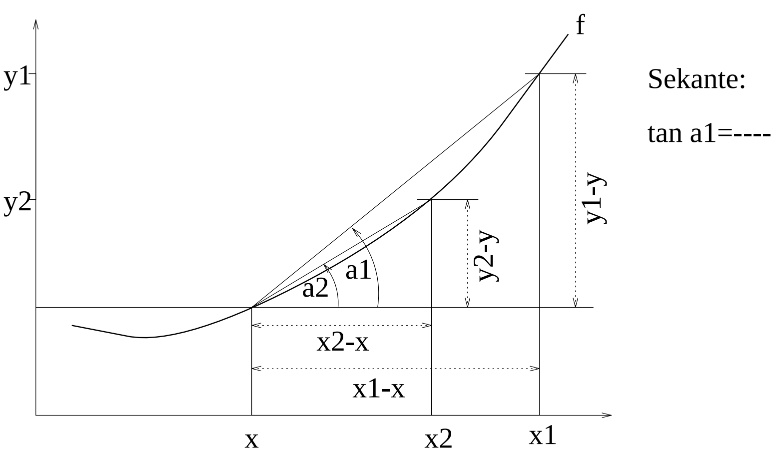

Abbildung 1.6: Differenzenquotient

Die Steigung der Sekante ist somit der Differenzenquotient

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Bemerkung: Zur Definition der Ableitung an der Stelle x muß f in einer Umgebung von x definiert sein.

Definition 1.3.4: *Wenn* $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ *existiert, dann heißt* f *differenzierbar an der Stelle* x*. Für den Limes schreibt man* $\frac{dy}{dx}(x) = y'(x) = \frac{df}{dx}(x) = f'(x)$ *und bezeichnet ihn als die* 1. Ableitung *von* f *an der Stelle* x*.*

Beispiel: $y = f(x) = c$, $f(x+h) - f(x) = c - c = 0$, daraus folgt: $c' = 0$, $\frac{dc}{dx} = 0$.

Beispiel: $y = f(x) = x$, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x+h-x}{h} = 1$, d.h.: $\frac{dx}{dx} = 1$.

Beispiel: $y = f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \frac{1}{h}\Big[\binom{n}{0} x^n h^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^n - x^n\Big] \\ &= n x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \cdots + \binom{n}{n} h^{n-1}. \end{aligned}$$

Es folgt daher $(x^n)' = nx^{n-1} = \frac{dx^n}{dx}$.

Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Satz 1.3.5: *Ist eine Funktion an der Stelle x differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.*

Die Umkehrung gilt nicht.

1.4 Regeln der Differentialrechnung

1. Differentiation einer Summe $y(x) = u(x) + v(x)$. Es gilt
$$(u+v)' = u' + v'.$$
Beweis:
$$\begin{aligned} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} &= \frac{u(x+h) + v(x+h) - u(x) - v(x)}{h} \\ &= \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h}. \end{aligned}$$
Für $h \to 0$ folgt dann die Behauptung. □

2. Differentiation eines Produktes: $y(x) = u(x)v(x)$. Es gilt
$$(uv)' = u'v + uv'.$$
Beweis:
$$\begin{aligned} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} &= \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \\ &= \frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x+h) + u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h}. \end{aligned}$$

Für $h \to 0$ folgt dann wieder die Behauptung. $\square$

Bemerkung: Insbesondere gilt: $(cf)^{'} = cf^{'}$.

3. Differentiation eines Quotienten: $y(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ mit $v(x) \neq 0$. Es gilt

$$\left(\frac{u}{v}\right)^{'} = \frac{u^{'}v - uv^{'}}{v^2}.$$

4. Differentiation einer zusammengestzten Funktion: $y = F(x) = f(g(x))$. Hier gilt die sogenannte *Kettenregel*

$$f(g(x))^{'} = f^{'}(g(x))g^{'}(x).$$

Beweis: $u = g(x)$, $y = f(u)$. Dann gilt:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}.$$

Wir setzen $u + k = g(x+h)$, also $k = g(x+h) - g(x)$, und erhalten

$$\frac{f(u+k) - f(u)}{k}\frac{k}{h} = \frac{f(u+k) - f(u)}{k}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \xrightarrow{h \to 0} f^{'}(u)g^{'}(x).$$

$f^{'}(g(x))$ wird als die äußere Ableitung und $g^{'}(x)$ als die innere Ableitung bezeichnet. $\square$

Andere Notation: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$.
Verallgemeinerung: $y = f(g(h(k(x))))$, $\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dh}\frac{dh}{dk}\frac{dk}{dx}$.

5. Differentiation der inversen Funktion: Sei $f(x)$ in (a, b) differenzierbar und streng monoton, weiters sei $f^{'}(x_0) \neq 0$.

Bei $y_0 = f(x_0)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left(f^{-1}(y_0)\right)^{'} &= \lim_{y_1 \to y_0} \frac{f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_0)}{y_1 - y_0} \\
&= \lim_{x_1 - x_0} \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \\
&= \frac{1}{f'(x_0)} \\
&= \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.
\end{aligned}$$

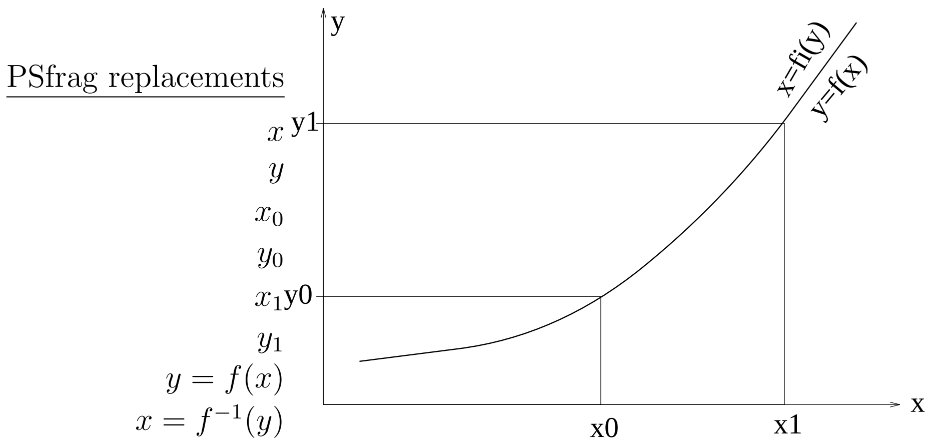

Abbildung 1.7: Differentiation der inversen Funktion

Satz 1.4.6: *Die Ableitung der Umkehrfunktion ist gegeben durch*

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Definition 1.4.5: $f\colon I = (a, b) \to \mathbb{R}$ *heißt differenzierbar auf* I*, falls* $f'(x)$ *an jeder Stelle* $x \in I$ *existiert. Ist* $f'(x)$ *stetig auf* I*, so heißt* $f(x)$ stetig differenzierbar auf I*, was man mit* $f \in C^1(a, b)$ *abkürzt.*

1.5 Höhere Ableitungen

Definition 1.5.6: $f\colon I \to \mathbb{R}$, I *offenes Intervall, sei differenzierbar.*

1. *Falls die Ableitung* $f'\colon I \to \mathbb{R}$ *am Punkt* $x_0 \in I$ *differenzierbar ist, heißt* f zweimal differenzierbar an der Stelle x_0 *und*

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) = f''(x_0) := (f')'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

heißt 2. Ableitung von f *an* x_0.

2. *Ist* f' *selbst eine differenzierbare Funktion, so nennt man die Funktion* f'' *die 2. Ableitung von* f*, und* f *heißt* zweimal differenzierbar.

3. *Ist* $f^{''} : I \to \mathbb{R}$ *stetig, dann heißt* f zweimal stetig differenzierbar.

4. *Induktive Definition der* k - ten Ableitung*:*

$$\frac{d^k f}{dx^k}(x_0) := f^{(k)}(x_0) := (f^{(k-1)})^{'}(x_0).$$

5. $f : I \to \mathbb{R}$ *heißt* k *- mal differenzierbar, wenn* f *in jedem Punkt von* I k - mal differenzierbar *ist.*

6. f *heißt* beliebig oft differenzierbar*, wenn für jedes* $k \in \mathbb{N}$ *gilt:* f *ist* k *- mal differenzierbar.*

Differentiation eines Produktes

Sei $y(x) = u(x)v(x)$, dann ist

$$y^{'}(x) = u^{'}v + uv^{'} \text{ und}$$
$$y^{''}(x) = u^{''}v + u^{'}v^{'} + u^{'}v^{'} + uv^{''} = u^{''}v + 2u^{'}v^{'} + uv^{''}.$$

Das ist ein Spezialfall der *Leibniz'schen Produktregel*:

$$y^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x).$$

Kapitel 2

Elementare Funktionen

2.1 Die trigonometrischen Funktionen

Die Funktionen $\sin x$ **und** $\cos x$

Wir definieren die Funktionen

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1,1], \quad x \mapsto \cos x,$$

$$\sin : \mathbb{R} \to [-1,1], \quad x \mapsto \sin x,$$

wobei, wobei $(\cos x, \sin x)$ der dem im Bogenmaß gemessenen Winkel x entsprechenden Punkt des Einheitskreis ist.

PSfrag replacements
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
x
$\cos x$
$\sin x$

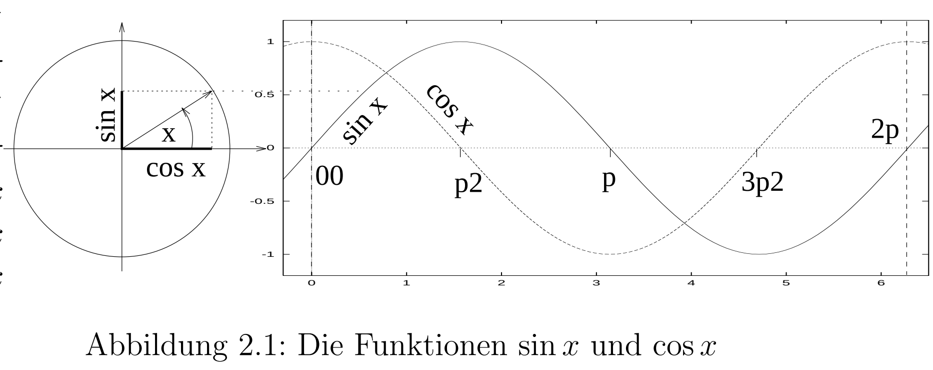

Abbildung 2.1: Die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$

Eigenschaften:

$\sin x$ und $\cos x$ sind 2π - periodisch:

$$\sin(x+2\pi) = \sin x, \quad \cos(x+2\pi) = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Weiters gilt:

$$\sin(x+\pi) = -\sin x, \quad \cos(x+\pi) = -\cos x,$$

$$\cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2}), \quad \sin x = \cos(x-\frac{\pi}{2}),$$

$\sin x$ hat die Nullstellen $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$\cos x$ hat die Nullstellen $x = (k+\frac{1}{2})\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$\sin(-x) = -\sin x$; $\sin x$ ist ungerade,
$\cos(-x) = \cos x$; $\cos x$ ist gerade,

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, für alle $x \in \mathbb{R}$,

$|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$, für alle $x \in \mathbb{R}$.

Besondere Werte:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Vorzeichen:

Quadrant	I	II	III	IV
$\sin x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos x$	$+$	$-$	$-$	$+$

Der Sinussatz

Sei A, B, C ein Dreieck mit den Seiten a, b, c und gegenüberliegenden Winkeln x, y, z. Aus $\sin x = \frac{h}{b}$ und $\sin y = \frac{h}{a}$ folgt $b\sin x = a\sin y$ und analog $c\sin x = b\sin z$. Daher gilt der *Sinussatz*

$$\frac{\sin x}{a} = \frac{\sin y}{b} = \frac{\sin z}{c}.$$

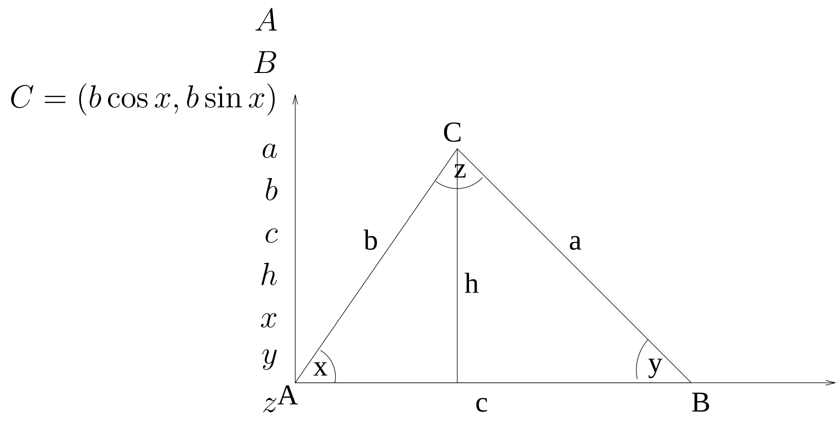

Abbildung 2.2: Sinussatz

Der Cosinussatz

Aus Abbildung **??** sieht man auch, daß gilt

$$\begin{aligned} a^2 &= (c - b\cos x)^2 + (b\sin x)^2 \\ &= c^2 - 2bc\cos x + b^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos x. \end{aligned}$$

Additionstheoreme

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\
&\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\
&\sin 2x = 2 \sin x \cos x \\
&\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \\
&\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \\
&\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x) \\
&2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y) \\
&2 \sin x \cos y = \sin(x - y) + \sin(x + y) \\
&2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y) \\
&\sin x \pm \sin y = 2 \sin \tfrac{x \pm y}{2} \cos \tfrac{x \mp y}{2} \\
&\cos x + \cos y = 2 \cos \tfrac{x+y}{2} \cos \tfrac{x-y}{2} \\
&\cos x - \cos y = -2 \sin \tfrac{x+y}{2} \sin \tfrac{x-y}{2}
\end{aligned}$$

PSfrag replacements

$r = 1$
l
x
y

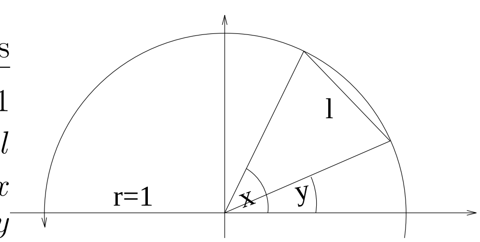

Abbildung 2.3: Additionstheorem für den Cosinus

Beweis: Wir beweisen das Additionstheorem für den Cosinus. Alle anderen Resultate können leicht aus diesem abgeleitet werden. Aus dem Cosinussatz folgt

$$l^2 = 1 + 1 - 2\cos(x - y).$$

Es gilt aber auch

$$\begin{aligned}
l^2 &= (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 \\
&= \cos^2 x - 2\cos x \cos y + \cos^2 y + \sin^2 x - 2 \sin x \sin y + \sin^2 y \\
&= 2 - 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y).
\end{aligned}$$

Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für l^2 liefert das Ergebnis. □

Die Funktionen $\tan x$, $\cot x$

Die Funktionen $\tan x$ und $\cot x$ sind durch

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{auf} \quad \mathbb{R} \setminus \{(k + \frac{1}{2})\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{auf} \quad \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$$

definiert. Ihr Bildbereich ist $\mathbb{R}$.

PSfrag replacements

A
B
C
D
$r = 1$
x
$\sin x$
$\cos x$
$\tan x$
$\cot x$

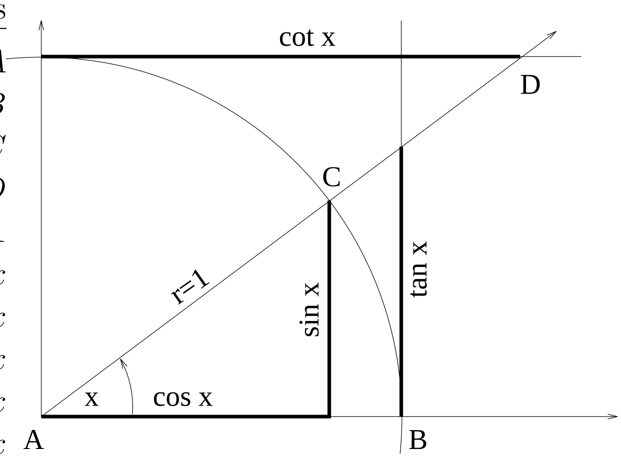

Abbildung 2.4: Die Funktionen $\tan x$ und $\cot x$

Eigenschaften von $\tan x$ **und** $\cot x$

Periode π,

$\tan x = -\tan(-x)$, ungerade,

$\cot x = -\cot(-x)$, ungerade,

$\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Das *Additionstheorem* für die Funktion $\tan x$ lautet:

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

Zwei wichtige Ungleichungen:

$$|\sin x| \leq |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R} \,,$$
$$x \leq \tan x, \quad \text{für} \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2} \,.$$

Die Ableitung von $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ und $\cot x$

Die Winkelfunktionen $\sin x$ und $\cos x$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x, \qquad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x.$$

Beispiel: Aus der Quotientenregel folgt auf dem jeweiligen Definitionsbereich

$$\begin{aligned}
(\tan x)' &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} &= \frac{1}{\cos^2 x}, \\
(\cot x)' &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} &= -\frac{1}{\sin^2 x}.
\end{aligned}$$

2.2 Die zyklometrischen Funktionen

Die zyklometrischen Funktionen sind die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen.

1. Die Funktion $\sin x$ ist auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ stetig und streng monoton wachsend. Daher existiert die Umkehrfunktion von $\sin x$, eingeschränkt auf das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Die Umkehrfunktion ist auf $[-1, 1]$ definiert und wird als *arcus sinus* bezeichnet, abgekürzt $\arcsin x$.

   Die Funktion $\arcsin x$ ist stetig und streng monoton wachsend. Es gilt $\arcsin(\sin x) = x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $\sin(\arcsin y) = y$, $y \in [-1, 1]$.

2. Die Funktion $\cos x$ ist auf $[0, \pi]$ stetig und streng monoton fallend. Die Umkehrfunktion von $\cos x$ eingeschränkt auf das Intervall $[0, \pi]$ ist daher auf dem Intervall $[-1, 1]$ definiert und wird mit *arcus cosinus* bezeichnet, abgekürzt $\arccos x$.

   Die Funktion $\arccos x$ ist stetig und streng monoton fallend. Es gilt

   $\arccos(\cos x) = x$, $x \in [0, \pi]$ und $\cos(\arccos y) = y$, $y \in [-1, 1]$.

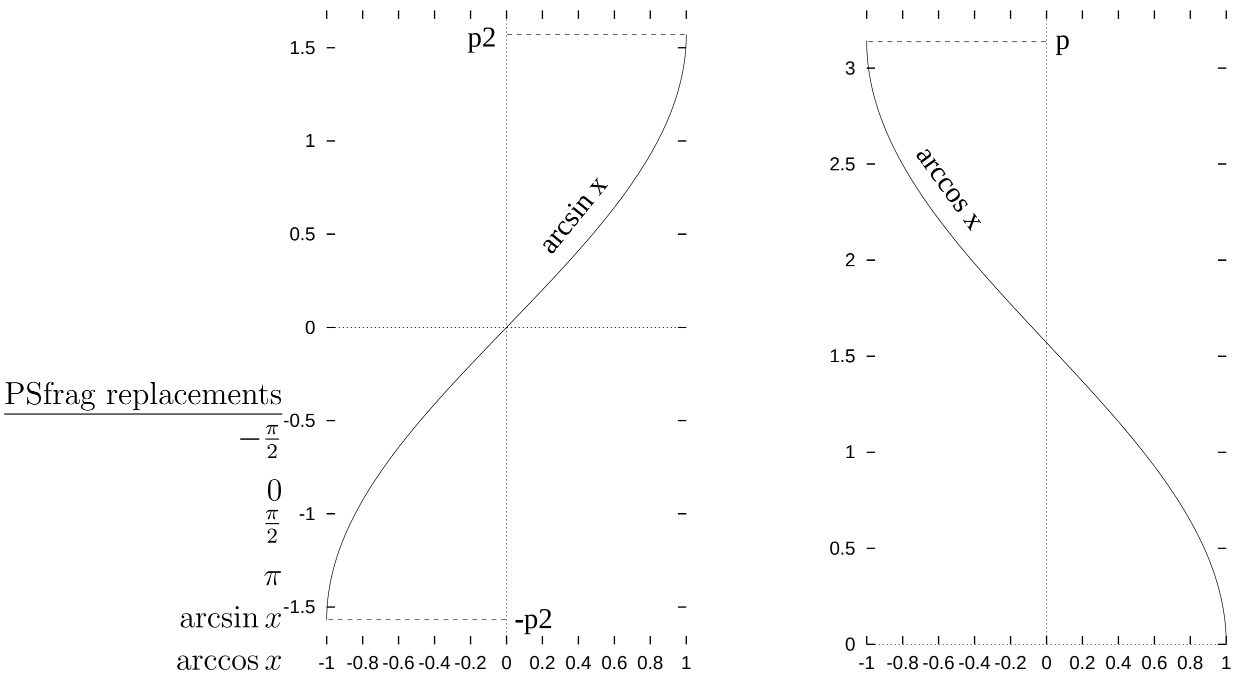

Abbildung 2.5: $y = \arcsin x$ und $y = \arccos x$

3. Die Funktion $\tan x$ ist auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ stetig und streng monoton wachsend. Die Umkehrfunktion von $\tan x$ eingeschränkt auf das Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist daher auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und wird mit *arcus tangens* bezeichnet, abgekürzt $\arctan x$.

   Die Funktion $\arctan x$ ist stetig und streng monoton wachsend. Es gilt: $\arctan(\tan x) = x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $\tan(\arctan y) = y$, $y \in \mathbb{R}$.
   Weiters gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$.

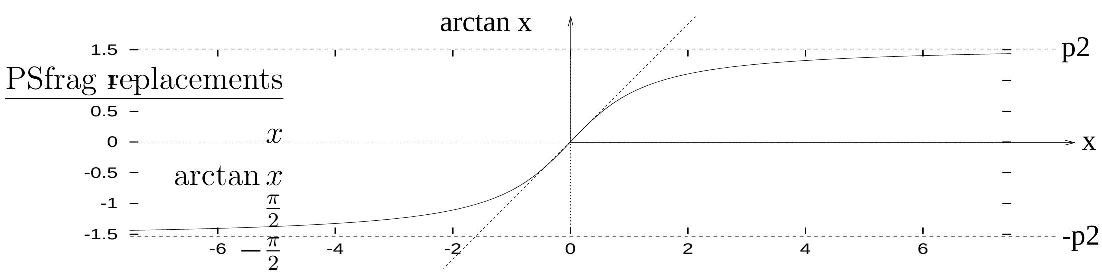

Abbildung 2.6: Graph von $\arctan x$

Die Funktion $\arctan x$ benötigt man, um die Polarkoordinaten r, φ eines Punktes in der Ebene aus seinen kartesischen Koordinaten x, y zu berechnen. Es gilt

$$\tan\varphi = \frac{y}{x}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Bei der Bestimmung des Winkels φ aus der ersten Gleichung mittels der Funktion arctan muß man berücksichtigen, in welchem Quadranten P liegt:

$$\varphi = \arctan\frac{y}{x} + \left[\frac{n}{2}\right]\pi,$$

wo n die Nummer des Quadranten und $[\,]$ die Gaußklammer ist.

Beispiel: Die zyklometrischen Funktionen sind differenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{d\arcsin x}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1) \\
\frac{d\arccos x}{dx} &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1) \\
\frac{d\arctan x}{dx} &= \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

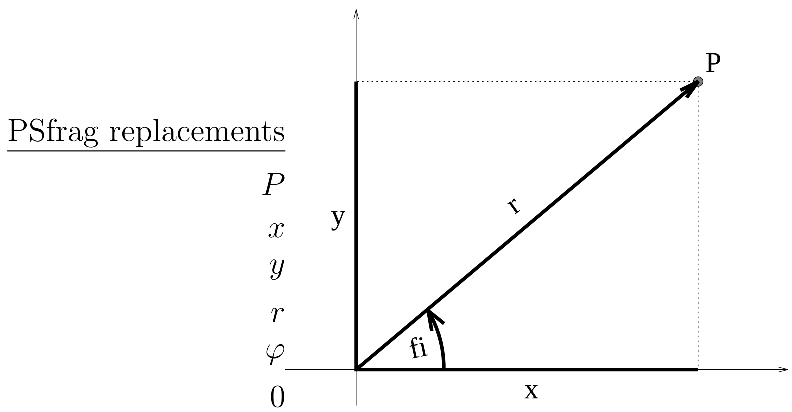

Abbildung 2.7: Polarkoordinaten in der Ebene

Beweis für $\arcsin x$: Wir setzen

$$f(x) = \sin x, \qquad f^{-1}(x) = \arcsin x \ .$$

Dann gilt

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ .$$

2.3 Die allgemeine Potenzfunktion

Potenzen

Die Potenzen x^n für eine beliebige **Basiszahl** $x \in \mathbb{R}$ (oder $x \in \mathbb{C}$) und **Exponenten** $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, sind definiert durch $x^0 := 1$, $x^1 = x$ und $x^{n+1} = x^n x$ und $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. (Für das Konzept der **vollständigen Induktion** wird auf die Vorlesung Analysis I für TPH verwiesen.) Dabei gelten die folgenden Rechenregeln, $n, m \in N$

$$\begin{array}{rrcl}
\text{Produkt:} & x^n x^m & = & x^{n+m} \\
\text{Quotient:} & \dfrac{x^n}{x^m} & = & x^{n-m} \\
\text{Potenz:} & (x^n)^m & = & x^{nm} \\
\text{Wurzel:} & x^{\frac{1}{m}} & = & \sqrt[m]{x} \\
 & x^{\frac{n}{m}} & = & \sqrt[m]{x^n}
\end{array}$$

Der Übergang von Exponenten aus der Menge $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{Q}$ zu reellen Exponenten wird in der Vorlesung Analysis I für TPH mittels dem **Intervallschachtelungsprinzip** hergeleitet.

Die Potenzfunktion

Die Funktion

$$f(x) = x^a$$

heißt **allgemeine Potenzfunktion** zum Exponenten a.

Ist $a \in \mathbb{Z}$, so ist x^a für $a > 0$ ein *Polynom*,
für $a < 0$ eine *rationale Funktion*
und für $a = 0$ *konstant*.

Für $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $a > 0$ sind der Definitionsbereich und der Bildbereich gegeben durch $[0, \infty)$ und im Falle $a < 0$ durch $(0, \infty)$. Für $a > 0$ ist x^a streng monoton wachsend und für $a < 0$ streng monoton fallend.

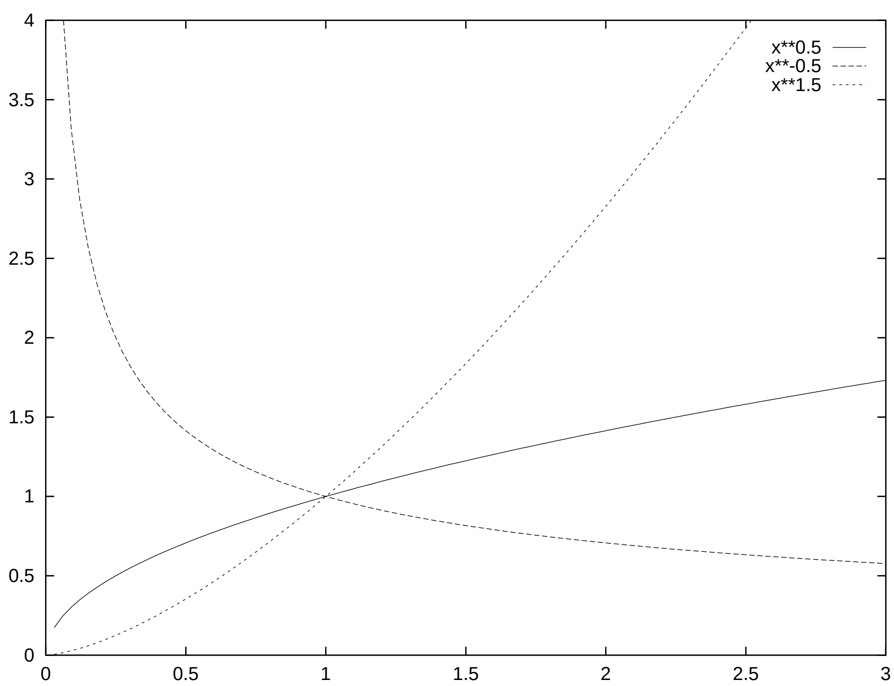

Abbildung 2.8: Potenzfunktionen: $x^{0.5}$, $x^{-0.5}$ und $x^{1.5}$

Für einen beliebigen Exponenten $a \in \mathbb{R}$ gilt die Ableitungsformel:

$$\frac{d}{dx}(x^a) = ax^{a-1} \qquad x > 0$$

2.4 Die allgemeine Exponentialfunktion

Es sei $a > 0$. Für $x \in \mathbb{R}$ definiert man die allgemeine Exponentialfunktion zur Basis a durch

$$f(x) = a^x$$

Sie ist für $a > 1$ streng monoton wachsend, für $0 < a < 1$ streng monoton fallend, für $a = 1$ konstant. Für sie gilt das Multiplikationstheorem:

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad \text{für alle} \quad x, y \in \mathbb{R}\ .$$

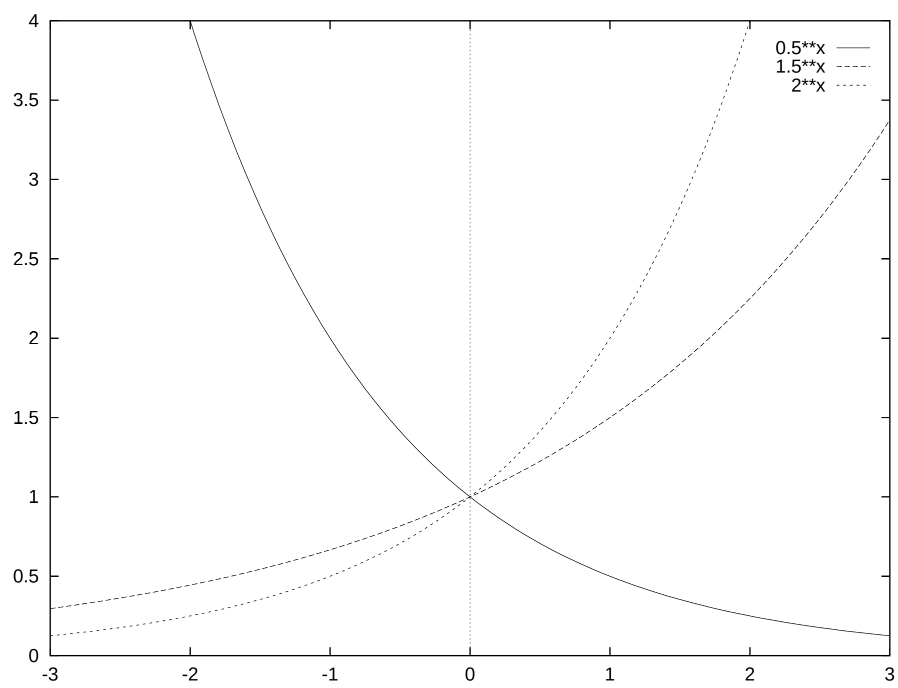

Abbildung 2.9: Exponentialfunktionen: $\frac{1}{2}^x$, $\frac{3}{2}^x$ und 2^x

2.5 Der allgemeine Logarithmus

Da die allgemeine Exponentialfunktion a^x für $a \neq 1$ das Intervall $(-\infty, \infty)$ streng monoton auf das Intervall $(0, \infty)$ abbildet, existiert die Umkehrfunktion und bildet das Intervall $(0, \infty)$ streng monoton auf das Intervall $(-\infty, \infty)$ ab. Diese Umkehrfunktion heißt Logarithmus zur Basis a, abgekürzt $\log_a x$. Daher gilt

$$y = \log_a x \quad \Longleftrightarrow \quad x = a^y$$

und

$$a^{\log_a x} = x, \quad x \in (0, \infty), \qquad \log_a(a^y) = y, \quad y \in (-\infty, \infty)\ .$$

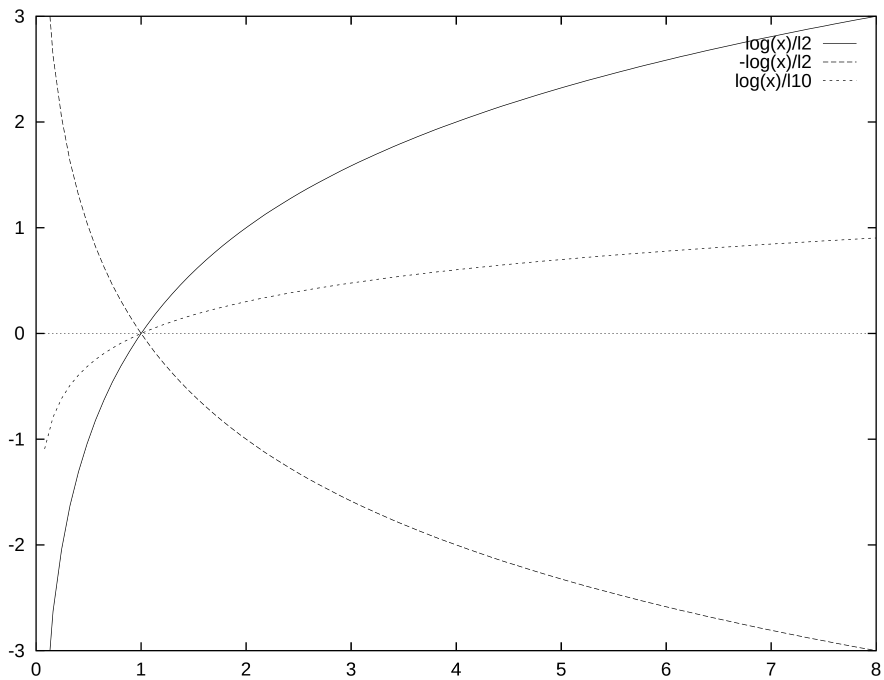

Abbildung 2.10: Logarithmusfunktionen: $\log_2$, $\log_{\frac{1}{2}}$ und $\log_{10}$

Die folgenden Rechenregeln vereinfachen das Rechnen mit Logarithmen und erlauben das Umrechnen von Logarithmen verschiedener Basen.

1. $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$.

2. $\log_a x + \log_a y = \log_a xy, \quad \forall x, y > 0$ *Additionstheorem.*
3. $\log_a (b^c) = c \log_a b$,
4. $\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$.

Beweis:

1. folgt aus der Definition der Logarithmusfunktion.
2. Wir ersetzen in $a^{x+y} = a^x a^y$ (Multiplikationstheorem), x durch $\log_a x$ und y durch $\log_a y$. Das Additionstheorem folgt aus
$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy = a^{\log_a xy}.$$
3. Aus $(a^r)^s = a^{rs}$ folgt mit $r = \log_a b$, $s = c$
$$b^c = \left(a^{\log_a b}\right)^c = a^{c \log_a b},$$
daher gilt (3).
4. Setzt man in (3) für c den Ausdruck $\log_b c$ ein, so erhält man
$\log_a c = \log_a b \log_b c$.

□

2.6 Natürliche Exponentialfunktion und natürlicher Logarithmus

Die Funktion e^x heißt natürliche Exponentialfunktion. Für sie gelten die Eigenschaften der allgemeinen Exponentialfunktion, d.h. e^x ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, streng monoton wachsend, jeder Funktionswert ist positiv und wird genau einmal angenommen.

Die Umkehrfunktion heißt der natürliche Logarithmus $\ln x$ und ist auf $(0, \infty)$ definiert. Die Funktion $\ln x$ ist streng monoton wachsend. Es gelten die Beziehungen $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, $\ln e^x = x$, $\forall x$, $x \in \mathbb{R}$ und $e^{\ln y} = y$, $y > 0$. Die

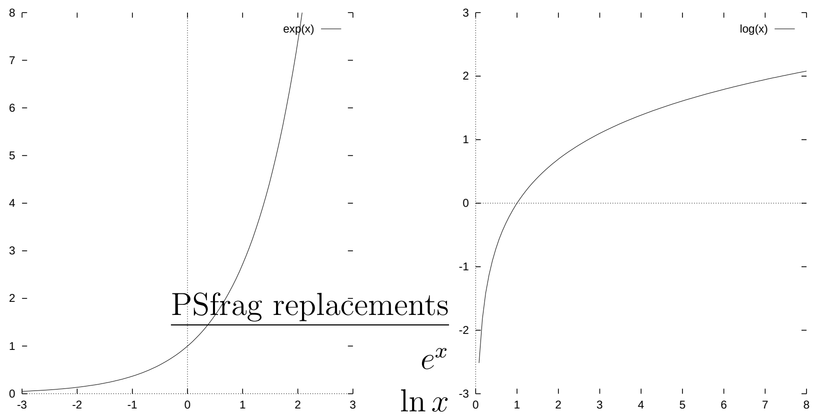

Abbildung 2.11: Natürliche Exponentialfunktion und natürlicher Logarithmus

allgemeine Exponentialfunktion a^x läßt sich wegen $a = e^{\ln a}$ durch die natürliche Exponentialfunktion folgend darstellen:

$$a^x = e^{x \ln a}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Analog gilt

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad 0 < x < \infty.$$

2.7 Die Hyperbelfunktionen

Wir definieren die Hyperbelfunktionen als

$$\textit{Cosinus hyperbolicus:} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\textit{Sinus hyperbolicus:} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\textit{Tangens hyperbolicus:} \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\textit{Cotangens hyperbolicus:} \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

Die Funktionen $\cosh x$, $\sinh x$, $\tanh x$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, die Funktion $\coth x$ ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert.

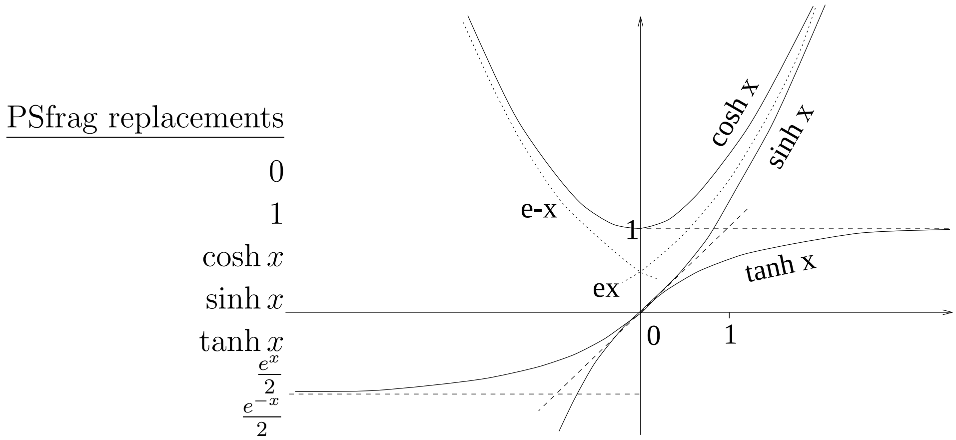

Abbildung 2.12: Hyperbelfunktionen

Eigenschaften der Hyperbelfunktionen

Die Hyperbelfunktionen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig,
$\cosh x = \cosh(-x)$, gerade Funktion,
$\sinh x = -\sinh(-x)$, ungerade Funktion,
$\tanh x = -\tanh(-x)$, ungerade Funktion,
$\coth x = -\coth(-x)$, ungerade Funktion.

Identitäten und Additionstheoreme

$$\begin{aligned}
&\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,\\
&\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x,\\
&e^x = \cosh x + \sinh x, \quad e^{-x} = \cosh x - \sinh x,\\
&\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y,\\
&\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y.
\end{aligned}$$

Begründung des Namens „Hyperbelfunktion“: Wir setzen $\xi = \cosh x$, und $\eta = \sinh x$, $x \in \mathbb{R}$. Dann liegen die Punkte (ξ, η) auf der Hyperbel $\xi^2 - \eta^2 = 1$. Jeder Punkt (ξ, η) der Hyperbel ist durch ein Koordinatenpaar $(\cosh x, \sinh x)$, $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Dabei hat x die Bedeutung der Fläche, die zwischen ξ - Achse, Kurvenstück und der Verbindung des Punktes (ξ, η) mit dem Ursprung liegt.

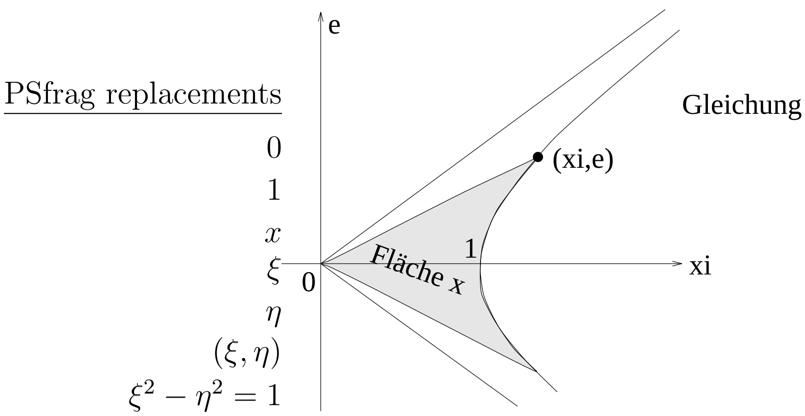

Abbildung 2.13: Geometrische Interpretation

2.8 Areafunktionen

Die *Areafunktionen* sind als die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen definiert.

Die Funktion $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Daher existiert die Umkehrfunktion *Area sinus hyperbolicus*, die wir mit $\operatorname{arsinh} x$ bezeichnen.

Aus $x = \sinh y \Leftrightarrow y = \operatorname{arsinh} x$ und der Definition von $\sinh x$ erhalten wir

$$2x = e^y - e^{-y} .$$

Wenn wir $e^y = z$ setzen und mit z multiplizieren, erhalten wir die quadratische Gleichung $z^2 - 2xz - 1 = 0$ mit der Lösung $z_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$. Da $z > 0$ gelten muß, folgt $e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ und wir erhalten damit die folgende Darstellung:

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R} .$$

Die Funktion $\cosh : \mathbb{R} \to [1, \infty)$ nimmt jeden Wert $y > 1$ genau zweimal an. Auf $[0, \infty)$ ist sie streng monoton wachsend und auf $(-\infty, 0]$ ist sie streng monoton fallend. Daher existiert auf jedem dieser Intervalle eine Umkehrfunktion *Area cosinus hyperbolicus*, die wir mit $\operatorname{arcosh} x$ bezeichnen.

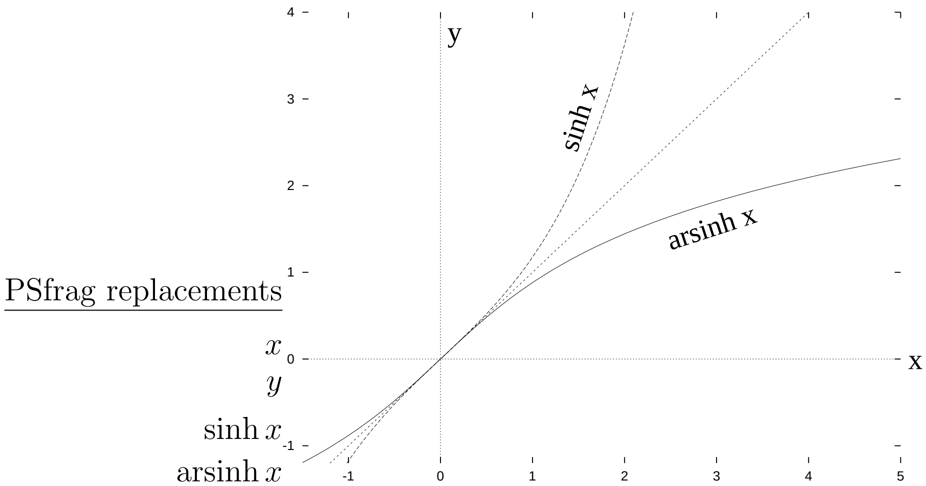

Abbildung 2.14: $y = \operatorname{arsinh} x$

Eine Formel für $\operatorname{arcosh} x$ wird durch Auflösen der Gleichung $x = \cosh y$ nach y hergeleitet. Man erhält:

$$\operatorname{arcosh} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1 \ .$$

Dabei ist, präzise gesprochen, der obere (+) Ast von $\operatorname{arcosh} x$ die Umkehrfunktion des rechten Astes von $\cosh x$ und der untere ($-$) Ast die Umkehrfunktion des linken Astes von $\cosh x$.

Die Funktion $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Daher existiert eine Umkehrfunktion *Area tangens hyperbolicus*, die wir mit $\operatorname{artanh} x$ bezeichnen.

Aus $x = \tanh y$, $e^y = z$, $x = \dfrac{z - \frac{1}{z}}{z + \frac{1}{z}}$, u.s.w. erhalten wir die formelmäßige Darstellung

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad x \in (-1, 1) \ .$$

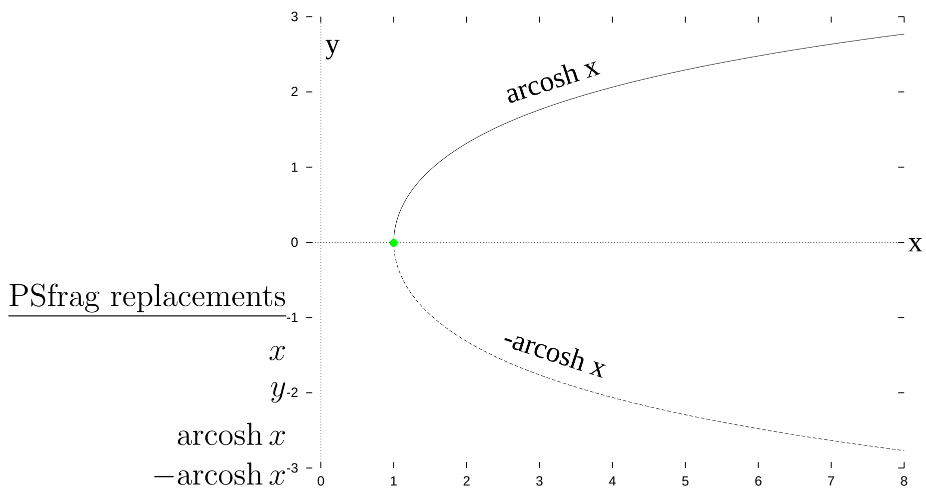

Abbildung 2.15: $y = \operatorname{arcosh} x$

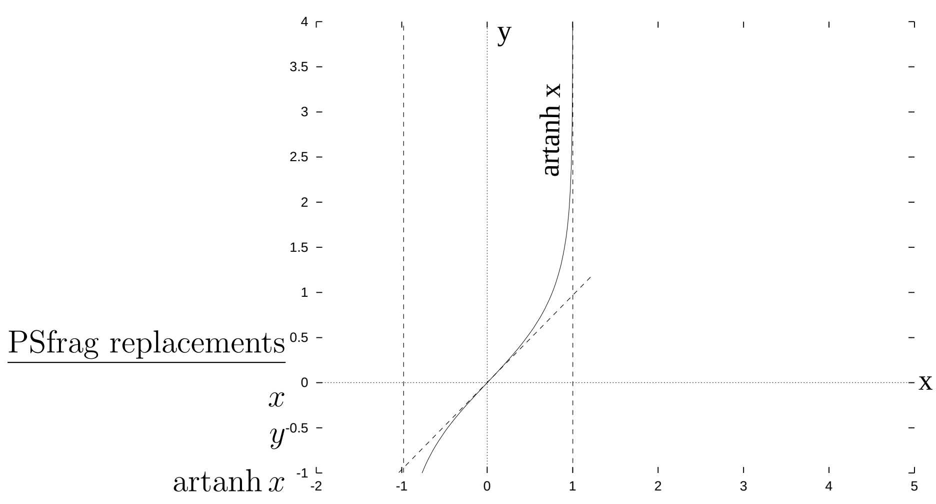

Abbildung 2.16: $y = \operatorname{artanh} x$

Anhang A

Komplexe Zahlen

A.1 Einführung

Die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit p, $q \in \mathbb{R}$ hat für $D = \frac{p^2}{4} - q \geq 0$ die Lösungen $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. Für $D < 0$ gibt es keine reellen Lösungen. *Euler* hat 1777 das Symbol i mit der Eigenschaft

$$i^2 = -1$$

eingeführt. „Zahlen“ der Form $x + iy$, x, $y \in \mathbb{R}$ nannte man von da an komplexe Zahlen.

Notation:

$$\begin{aligned}
&z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R} \quad \text{komplexe Zahl} \\
&x = Re\, z \ldots \text{Realteil von } z, \\
&y = Im\, z \ldots \text{Imaginärteil von } z, \\
&z = 0 + iy = iy, \quad \text{rein imaginäre Zahl}
\end{aligned}$$

Die Menge aller komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Gauß (1777-1855): Geometrische Interpretation komplexer Zahlen als Punkte in der „Gauß’schen Zahlenebene“.

PSfrag replacements
0
1
i
-1
$-i$
x
y
$z = 4 + 3i$

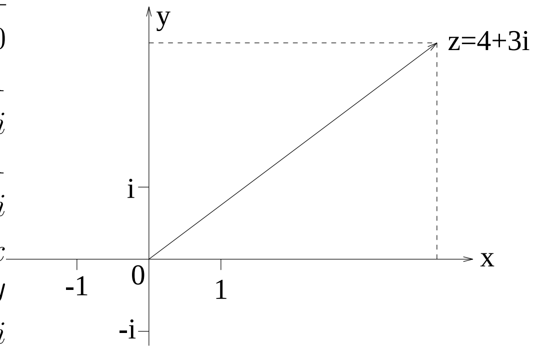

Abbildung A.1: Gauß'sche Zahlenebene

A.2 Rechengesetze

Addition

$$z_1 = a + ib, \quad z_2 = c + id,$$
$$z_1 + z_2 := (a + c) + i(b + d).$$

Die geometrische Interpretation in der Gauß'schen Zahlenebene ist die Vektoraddition.

PSfrag replacements
0
x
y
z_1
z_2
$z_1 + z_2$

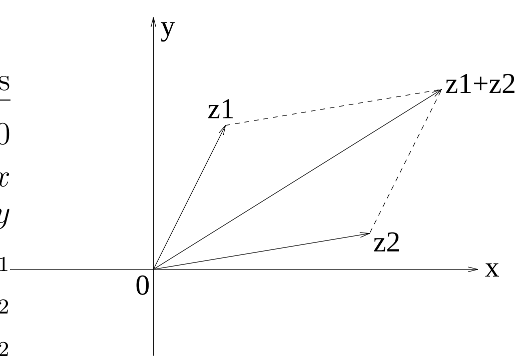

Abbildung A.2: Addition von komplexen Zahlen

Multiplikation

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Begründung: $z_1 z_2 = (a+ib)(c+id) = ac+ibc+iad+i^2bd = (ac-bd)+i(ad+bc))$

Für beliebige komplexe Zahlen x, y, z gelten die für reelle Zahlen angeführten Gesetze der Addition und der Multiplikation.

> Nullelement der Addition: $0 = 0 + 0i$,
> Additiv inverses Element: $-z = -x - iy$.

Das führt auf die folgende Definition der

Subtraktion

$$\begin{aligned} &z_1 = a + ib, \quad z_2 = c + id, \\ &z_2 - z_1 := z_2 + (-z_1) = (c-a) + i(d-b). \end{aligned}$$

Einselement der Multiplikation: $1 = 1 + 0i$.
Multiplikativ inverses Element: Zu jedem $z \neq 0$ existiert genau eine Zahl z', so daß gilt: $z \cdot z = 1$. Für z' schreibt man z^{-1} oder $\frac{1}{z}$. Berechnung von $z' = u + iv$:

$$1 + 0i = z \cdot z' = (x+iy)(u+iv) = (ux - vy) + i(vx + uy)$$

Daher muß gelten $ux - vy = 1$, $vx + uy = 0$. Für $z \neq 0$, d.h. $x^2 + y^2 \neq 0$ ist dieses Gleichungssystem eindeutig lösbar und die Lösung ist:

$$u = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Das führt auf die folgende Definition der

Division

$$\frac{z_1}{z_2} := z_1 z_2^{-1} = z_2^{-1} z_1.$$

Definition A.2.1: *: Man nennt $\overline{z} = x - iy$ die zu $z = x + iy$* konjugiert komplexe *Zahl (konjugierte Zahl).*

Bemerkung: $z\overline{z} = x^2 + y^2$, $z\overline{z} > 0 \Leftrightarrow z \neq 0$.

Beweis: $z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 + i(xy - xy) = x^2 + y^2$. □

PSfrag replacements

0

x

iy

$-iy$

$z = x + iy$

$\overline{z} = x - iy$

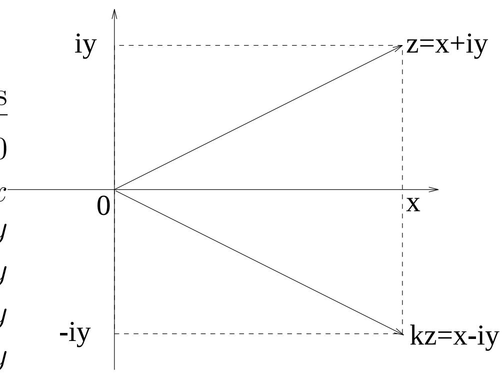

Abbildung A.3: Konjugiert komplexe Zahl

Definition A.2.2: *: Der* Betrag *einer komplexen Zahl $z = x + iy$ ist ihr Abstand vom Nullpunkt,*

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

Bemerkung: $|z|^2 = z\overline{z}$.

Beispiel: (Verwendung von $\overline{z}$ bei der Division)

$$z = \frac{4 + 5i}{1 + 2i}$$

Erweiterung des Nenners mit $\overline{z}$:

$$\begin{aligned} \frac{4 + 5i}{1 + 2i}\frac{1 - 2i}{1 - 2i} &= \frac{4 + 10 + i(5 - 8)}{1 + 4} \\ &= \frac{14}{5} - \frac{3}{5}i. \end{aligned}$$

Bemerkung: Für $z \neq 0$ gilt

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \ .$$

Eigenschaften von Realteil, Imaginärteil und der konjugiert komplexen Zahl

Satz A.2.1: *: Es seien z, $w \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

1. *Re* $z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, *Im* $z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$,
2. *Re* $(z + w) =$ *Re* $z +$ *Re* w, *Im* $(z + w) =$ *Im* $z +$ *Im* w,
3. $z \in \mathbb{R}$, *genau dann, wenn* $z = \overline{z}$,
4. $\overline{\overline{z}} = z$,
5. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,
6. $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$,
7. $w \neq 0 : \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$,
8. $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Eigenschaften des Betrages

Satz A.2.2: *: Es seien* $z, w \in \mathbb{C}$. *Dann gilt*

1. $|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,
2. $|wz| = |w||z|$
3. $w \neq 0$, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$,
4. $|\overline{z}| = |z|$, $|-z| = |z|$,
5. $-|z| \leq Re\, z \leq |z|$, $-|z| \leq Im\, z \leq |z|$
6. *Dreiecksungleichung:* $|w \pm z| \leq |w| + |z|$

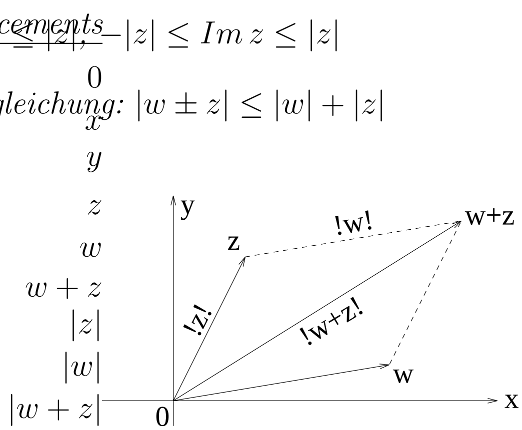

Abbildung A.4: Dreiecksungleichung

7. $|w \pm z| \geq ||w| - |z||$.

Geometrischer Beweis der Dreiecksungleichung: Im Dreieck gilt, daß die Länge der Hypotenuse kleiner oder gleich ist der Summe der Katheten ist, vgl. Abb. **??**.

A.3 Die Polarform einer komplexen Zahl

PSfrag replacements

0
1
i
x
y
$z = x + iy$
φ
$r = |z|$

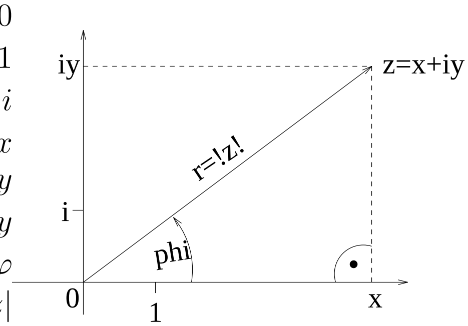

Abbildung A.5: Die Polarform von z

Wie in Abb. **??** ersichtlich, kann man jeder komplexen Zahl z einen Winkel φ zuordnen, den man als das *Argument* von z bezeichnet: $\arg z := \varphi$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \tfrac{x}{|z|}, & x &= |z|\cos\varphi, \\ \sin\varphi &= \tfrac{y}{|z|}, & y &= |z|\sin\varphi, \end{aligned}$$

Daher gilt $z = |z|\cos\varphi + |z|i\sin\varphi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
Die Darstellung

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

nennt man die *Polarform* der komplexen Zahl z.
Das Argument φ ist nur bis auf Vielfache von 2π eindeutig bestimmt. φ ist eindeutig bestimmt, wenn man z.B. fordert, daß

$$-\pi < \varphi \leq \pi \text{ oder } 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Beispiel: (vgl. Abb. **??**):

$$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0),$$

PSfrag replacements

0
1
i
$-i$
x
iy
$1+i$
$1-i$

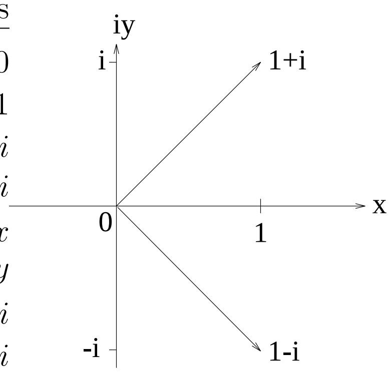

Abbildung A.6: Beispiel zur Polarform

$$\begin{aligned}
i &= 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}),\\
1+i &= \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}),\\
1-i &= \sqrt{2}\Big(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}\Big)\\
&= \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}).
\end{aligned}$$

Die Produktformel

Aus

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$$

folgt

$$\begin{aligned}
zw &= |z||w|(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi)\\
&= |z||w|[(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi)\\
&\quad +i(\sin\varphi\cos\psi + \sin\psi\cos\varphi)].
\end{aligned}$$

Daher

$$zw = |z||w|[\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)].$$

PSfrag replacements

0

1

i

z

w

φ

ψ

$|z|$

$|w|$

$z \cdot w$

$|z| \cdot |w|$

$\varphi + \psi$

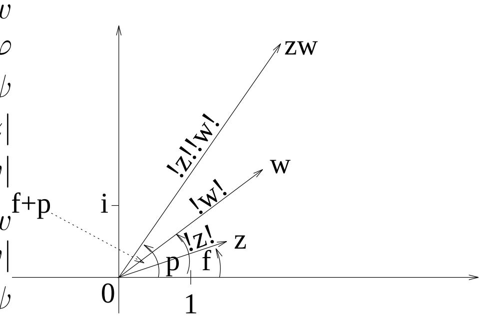

Abbildung A.7: Zur Produktformel

Die Division

Daher gilt für $w \neq 0$

$$w^{-1} = |w|^{-1}[\cos(-\psi) + i\sin(-\psi)] \ .$$

und weiters

$$\frac{z}{w} = z\,w^{-1} = \frac{|z|}{|w|}[\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi)].$$

Mittels vollständiger Induktion beweist man

Satz A.3.3: *$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Setzt man $|z| = 1$, so folgt daraus die *Formel von Moivre*:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Gleichbedeutend damit ist

$$(\cos\frac{\psi}{n} + i\sin\frac{\psi}{n})^n = \cos\psi + i\sin\psi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere gilt $(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n})^n = 1$.

Definition A.3.3: *Die Menge $\{z : z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ heißt* Einheitskreis. *Jede Zahl z auf dem Einheitskreis hat die* Polarform*: $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$.*

A.4 Die n - ten Wurzeln einer komplexen Zahl

Für $z = (\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n})$ gilt $z^n = 1$, d.h. z ist eine n - te Wurzel der Zahl 1. Die Zahlen

$$w_k := \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

sind lauter verschiedene n - te Wurzeln von 1, denn

$$(w_k)^n = \cos 2\pi k + i \sin 2\pi k = 1.$$

Beispiel: Die dritten Einheitswurzeln.

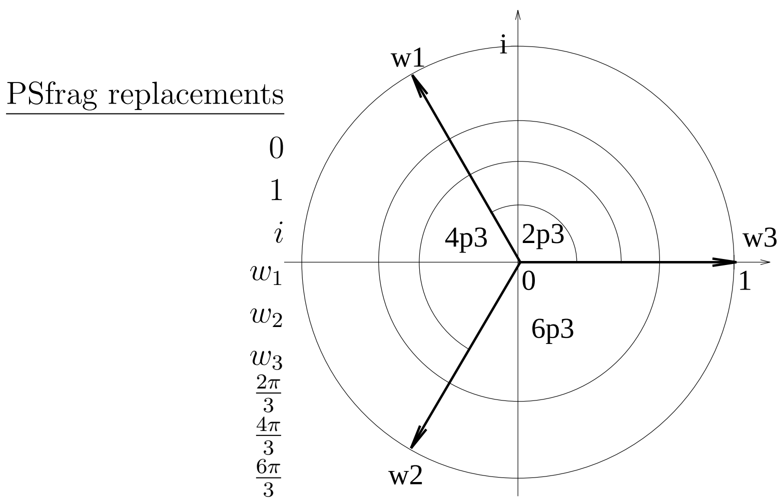

Abbildung A.8: Die dritten Einheitswurzeln

$$\begin{aligned}
w_1 &= \cos\tfrac{2\pi}{3} + i \sin\tfrac{2\pi}{3} &&= -\tfrac{1}{2} + i\sqrt{\tfrac{3}{2}} \\
w_2 &= \cos\tfrac{4\pi}{3} + i \sin\tfrac{4\pi}{3} &&= -\tfrac{1}{2} - i\sqrt{\tfrac{3}{2}} \\
w_3 &= \cos\tfrac{6\pi}{3} + i \sin\tfrac{6\pi}{3} &&= 1.
\end{aligned}$$

Definition A.4.4: *Sei $n \in \mathbb{N}$. Die n komplexen Zahlen $w_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$, für $k = 1, \ldots, n$ heißen n -* te Einheitswurzeln.

Die n - ten Einheitswurzeln sind die Eckpunkte eines dem Einheitskreis eingeschriebenen regelmäßigen n - Ecks, wobei eine Ecke bei eins liegt.

Mit $w_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ gilt $w_2 = w_1 w_1$, $w_3 = w_2 w_1, \ldots, w_n = w_{n-1} w_1$.

Man zeigt leicht, daß es keine weiteren n - ten Wurzeln von 1 gibt.

Beweis: Es sei $z = \cos\alpha + i \sin\alpha$. Aus $z^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha = 1 = \cos 2\pi k + i \sin 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ folgt $n\alpha = 2\pi k$, also $\alpha = \frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$. Unter den komplexen Zahlen mit diesem Argumenten gibt es genau n verschiedene, das sind w_1 bis w_n. $\square$

Satz A.4.4: *Sei $a = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ die Polarform einer komplexen Zahl $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau n komplexe Zahlen, die eine n - te Wurzel aus a sind und zwar*

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Man sagt: Die n - te Wurzel hat n - Zweige.

Beweis:

1.
$$\begin{aligned} z_k^n &= |a|[\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)], \\ &= |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= a. \end{aligned}$$

2. Daß es keine anderen n - ten Wurzeln aus a gibt, zeigt man wie für den Fall $a = 1$.

□

Man sieht, daß alle z_k auf einem Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $\sqrt[n]{|a|}$ liegen. Wegen $\arg z_1 = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}$ erhält man z_1 als denjenigen Punkt dieses Kreises, der zum Winkel $\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}$ gehört (Addition von $\frac{2\pi}{n}$ zu $\frac{\varphi}{n} = \frac{\arg a}{n}$). Geht man auf dem Kreis um $\frac{2\pi}{n}$ weiter, so erhält man z_2, geht man wieder um $\frac{2\pi}{n}$ weiter, so erhält man z_3, u.s.w..

Beispiel: Die vier vierten Wurzeln aus -16.

$$\begin{aligned} -16 &= 16(\cos\pi + i\sin\pi), \\ z_k &= \sqrt[4]{16}\Big(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}\Big), \quad k = 1, 2, 3, 4; \\ z_1 &= 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) \;=\; \sqrt{2}(-1 + i), \\ z_2 &= 2(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) \;=\; -\sqrt{2}(1 + i), \\ z_3 &= 2(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}) \;=\; \sqrt{2}(1 - i), \\ z_4 &= 2(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}) \;=\; \sqrt{2}(1 + i). \end{aligned}$$

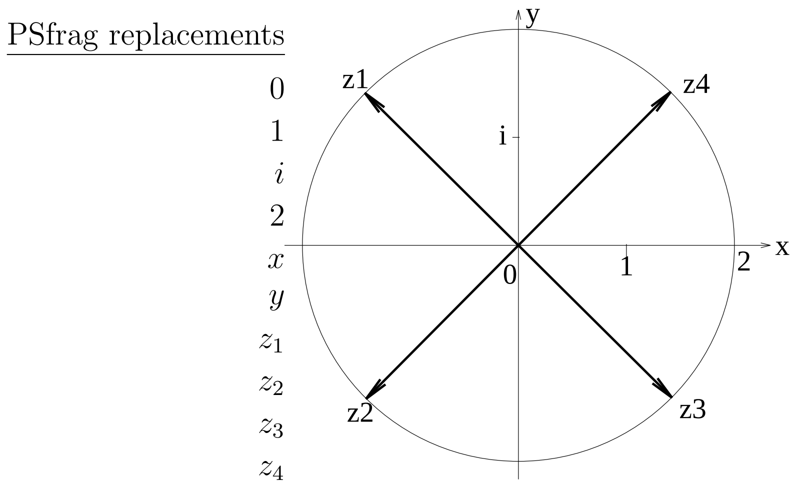

Abbildung A.9: Die 4. Wurzeln aus -16

Definition A.4.5: *Sei* $r \in \mathbb{Q}$, $r = \frac{p}{q}$, p, q *teilerfremd. Für jeden Zweig der* q *-ten Wurzel ist*

$$z^r = z^{\frac{p}{q}} := (z^{\frac{1}{q}})^p = (z^p)^{\frac{1}{q}}.$$