ANALYSIS 1

Vorlesung für Studenten der
Technischen Physik

Technische Universität Wien

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

1.1 Grundlagen

Wie kommt man überhaupt zu den Objekten einer mathematischen Theorie, zu Definitionen und im weiteren zu Aussagen, deren Gültigkeit man beweisen möchte?

Betrachten wir beispielsweise die natürlichen Zahlen. Kann man eine Definition der natürlichen Zahlen angeben? Was wären dann die schon bekannten Objekte, mit deren Hilfe die natürlichen Zahlen zu erklären sind, und inwiefern kennen wir diese „bekannten“ Objekte? Müssen sie nicht auch erklärt werden — und so weiter, ohne Ende? Man spürt, daß man auf diese Weise eine Wissenschaft nicht aufbauen kann, weil man nicht einmal dazu kommt, mit dem Bauen auch nur anzufangen. Irgendeine Grundlage, irgendeinen Ausgangspunkt wird man als gegeben ansehen müssen, und das wissenschaftliche Verfahren kann dann nur noch darin bestehen, diese Grundlage deutlich als solche zu bezeichnen, sie in allen Einzelheiten offen zu legen und von nun an nur noch Gründe gelten zu lassen, die — mittelbar oder unmittelbar — eben diesen Grundlagen entnommen sind, und zwar in einsehbarer nachvollziehbarer Weise, gleichsam im hellen Tageslicht vor den Augen der Öffentlichkeit.

Will man gemäß diesem Programm die natürlichen Zahlen dem Aufbau des Zahlensystems zugrundelegen, so wird man also nicht mehr von einer Definition dieser Zahlen ausgehen. Man wird nicht mehr fragen: was sind die natürlichen Zahlen und was ist ihr Wesen? - vielmehr wird man einige Grundeigenschaften derselben, einige Grundbeziehungen zwischen ihnen angeben und alles weitere allein aus diesen Aussagen entwickeln. Dieses Verfahren, an den Anfang einer Theorie einige Grund-Sätze, sogenannte *Axiome*, zu stellen (die man nicht mehr diskutiert, nicht mehr weiter „hinterfragt“ sondern einfach akzeptiert) und aus ihnen durch logisches Schließen den (ganzen) Aussagenbestand der Theorie zu gewinnen, nennt man *axiomatische* oder *deduktive Methode*.

Sie ist der Lebensnerv der Mathematik, das, wodurch die Mathematik zur Wissenschaft wird. Sie geht vermutlich auf den großen griechischen Mathematiker Eudoxus zurück und findet ihre erste volle Entfaltung in den „Elementen“ des Euklid von Alexandria (um 300 v. Chr.). Seit diesem epochalen Werk ist sie konstitutiv für die Mathematik und vorbildlich für die exakten Wissenschaften geworden. Isaac Newton (1642 - 1727) hat in seinen „Philosophiae naturalis principia mathematica“ die Mechanik aus seinen drei berühmten Gesetzen entwickelt. Baruch de Spinosa (1632 - 1677) hat seine Ethik „more geometrico“ (nach geometrischer, d.h. deduktiver Weise) geschrieben, und David Hilbert (1862 - 1943), einer der bedeutendsten Mathematiker, nicht nur der letzten Jahrhunderte, war der Meinung, daß jede reif gewordene Wissenschaft der Axiomatisierung anheimfalle.

Sicherlich ist das axiomatische Verfahren die ehrlichste Methode, die je ersonnen wurde: Ihr moralischer Kern besteht darin, daß man alle seine Voraussetzungen offen darlegt, daß man im Laufe des Spieles keine Karten aus dem Ärmel holt, und daß man somit alle seine Behauptungen überprüfbar macht.

Wir kehren zu den natürlichen Zahlen zurück. Der italienische Mathematiker Peano (1858 - 1932) hat für sie ein System von fünf Axiomen vorgeschlagen. Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist eine Menge mit folgenden Eigenschaften:

1. 1 ist eine natürliche Zahl.
2. Jeder natürlichen Zahl n ist genau eine natürliche Zahl $N(n)$ zugeordnet, die der *Nachfolger* von n genannt wird.
3. 1 ist kein Nachfolger.
4. Sind die natürlichen Zahlen n, m verschieden, so sind auch ihre Nachfolger $N(n)$, $N(m)$ verschieden (kurz: $n \neq m \Longrightarrow N(n) \neq N(m)$).
5. (Induktionsaxiom) Eine Eigenschaft, die für die Zahl 1 gilt und die, wenn sie für eine Zahl n gilt, auch für $N(n)$ gilt, gilt für alle natürlichen Zahlen.

Die Existenz einer Menge mit gewissen Eigenschaften kann man durch Angabe eines Beispiels einer solchen Menge sicherstellen. Erfolgt die Konstruktion dieses Beispiels mit mengentheoretischen Begriffen, dann spricht man von einem mengentheoretischen Modell.

Die folgende Konstruktion liefert ein mengentheoretisches Modell für die natürlichen Zahlen.

$$1 = \{\emptyset\},\ N(1) = 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ N(2) = 3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},$$

u.s.w.. Allgemeiner Schritt: $N(n) = n \cup \{n\}$.

Ausgehend von den Peano'schen Axiomen kann man nun auf der Menge der natürlichen Zahlen die Operationen $+$, $*$ und die Relationen $<, >, \leq, \geq$ einführen. Wir zeigen nur, wie man die Addition (rekursiv) definiert:

$$n + 1 := N(n), n + N(k) = N(n + k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Alles was wir über das Arbeiten mit den natürlichen Zahlen in der Mittelschule gelernt haben (und vieles mehr) kann man jetzt beweisen.

Die Herleitung der bekannten Rechenregeln für die natürlichen Zahlen aus den Peano'schen Axiomen ist zum Teil recht abstrakt und langwierig und erhöht nicht das Verständnis für das Arbeiten mit den natürlichen Zahlen. Darum gehen wir hier nicht weiter darauf ein. Es sei auch nur der Vollständigkeit halber erwähnt, daß zur Einführung der ganzen Zahlen, der rationalen Zahlen und der irrationalen Zahlen keine weiteren Axiome notwendig sind, sondern daß diese mittels entsprechender Definitionen auf der Basis der natürlichen Zahlen vorgenommen wird; so definiert man die rationalen Zahlen als „Klassen äquivalenter Paare von ganzen Zahlen“, die irrationalen Zahlen als die unendlichen nicht periodischen Dezimalbrüche (siehe Abschnitt 1.3).

Wir haben die natürlichen Zahlen als Beispiel benützt, um den axiomatischen Aufbau einer mathematischen Theorie zu illustrieren. Die Theorie der Struktur der natürlichen Zahlen, die wohl mit dem Satz über die Zerlegung einer natürlichen Zahl in Primfaktoren beginnt und zu tiefen Einsichten in die natürlichen Zahlen führt, nennt man Zahlentheorie.

1.2 Aussagenlogik und Beweisen

Die Aussagenlogik ist ein wesentliches Werkzeug für den Aufbau einer mathematischen Theorie.

Das Grundelement der Aussagenlogik ist die *Aussage.* Das ist ein Satz, der entweder *wahr* (w) oder *falsch* (f) ist. Da nur diese beiden *Wahrheitswerte* erlaubt sind, spricht man auch von zweiwertiger Logik.

Seien A und B Aussagen. Dann können durch Verknüpfungen daraus neue Aussagen gewonnen werden. Diese Verknüpfungen definieren wir durch Angabe von *Wahrheitstafeln*, die den Wahrheitswert der neuen Aussagen angeben.

- **Negation:** $\neg A$ ... „nicht A"

A	$\neg A$
w	f
f	w

- **Konjunktion:** $A \wedge B$ ... „A und B"

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

- **Disjunktion:** $A \vee B$ ... „A oder B"

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

  Man beachte, daß $\vee$ kein exklusives „oder" ist, wie es im Sprachgebrauch meist üblich ist.

- **Implikation:** $A \Longrightarrow B$ ... „A impliziert B"

A	B	$A \Longrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

  Man beachte, daß die Implikation immer dann wahr ist, wenn die Voraussetzung A falsch ist. „Wenn eins gleich zwei ist, kann ich Windsurfen wie Robby Naish" ist eine wahre Aussage.

  Ist $A \Longrightarrow B$ wahr, so nennt man A eine *hinreichende Bedingung* für B, und B eine *notwendige Bedingung* für A.

- **Äquivalenz:** $A \Longleftrightarrow B$ ... „A gilt genau dann, wenn B gilt"

A	B	$A \Longleftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Ausdrücke der Form $A \wedge B$, $\neg A$, oder auch komplizierter, wie $\neg(A \vee B) \Longrightarrow C$, nennt man *Aussageformen* (mit den *Variablen* A, B, C). Eine Aussageform, die für beliebige Wahrheitswerte der Variablen wahr ist, heißt *Tautologie*. Beispiel: $A \vee \neg A$.

Eine mathematische Theorie besteht darin, ausgehend von Axiomen eine Reihe von *Sätzen* zu beweisen. In den meisten Fällen haben Sätze die logische Struktur einer Implikation $A \Longrightarrow B$. In diesem Zusammenhang wird A *Voraussetzungen* oder *Annahmen* des Satzes genannt. Um zu beweisen, daß der Satz gilt, genügt es, die Gültigkeit von A anzunehmen und daraus durch eine Kette von Schlüssen die Gültigkeit von B zu folgern. Diesen Vorgang nennt man einen *direkten Beweis*. Eine andere Beweismethode beruht auf dem folgenden Resultat der Aussagenlogik.

Satz 1.2.1: *Für beliebige Aussagen A, B gilt*

$$(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Longrightarrow \neg A)\,.$$

Beweis: Wir führen den Beweis mit Hilfe einer Wahrheitstafel.

A	B	$A \Longrightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Longrightarrow \neg A$	$(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Longrightarrow \neg A)$
w	w	w	f	f	w	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

Da die letzte Spalte nur w-Einträge enthält, sind die Aussagen $A \Longrightarrow B$ und $\neg B \Longrightarrow \neg A$ äquivalent. qed.

Bemerkung: Man beachte, daß wir mit diesem Resultat beginnen, die Aussagenlogik selbst zu einer mathematischen Theorie zu entwickeln. ♠

Beispiel: Der Satz „x ist eine gerade Zahl $\Longrightarrow$ x^2 ist durch 4 teilbar“ ist äquivalent zu dem Satz „ x^2 ist nicht durch 4 teilbar $\Longrightarrow$ die Zahl x ist ungerade“. ♢

Aus dem Satz folgt, daß $A \Longrightarrow B$ auch dadurch bewiesen werden kann, daß man davon ausgeht, daß B falsch ist und daraus durch eine Kette von Schlüssen folgert, daß dann auch A falsch sein muß. Diese Beweismethode nennt man *indirekten Beweis.*

Quantoren: In Aussagen treten häufig Variable auf, die für die Objekte der entsprechenden mathematischen Theorie stehen. Betrachten wir den Satz „Die Zahl x ist größer als 7". Ohne weitere Angaben über x kann man nicht entscheiden, ob dieser Satz wahr oder falsch ist. Er ist daher keine Aussage. Wir nennen ihn eine *Eigenschaft* von x. Nähere Angaben können mit Hilfe des *Allquantors* $\forall$ oder des *Existenzquantors* $\exists$ gemacht werden. In dieser Notation schreibt man die Aussage „Alle Zahlen x sind größer als 7" als $\forall x: \; x > 7$, und die Aussage „Es gibt eine Zahl x, die größer als 7 ist" als $\exists x: \; x > 7$.

Es können auch mehrere Variable auftreten. Dann muß jede davon mit einem Quantor versehen sein. Man beachte, daß es dabei auf die Reihenfolge ankommt.

Beispiel: Sei $P(x, y)$ der Satz „Der Mensch x hat die Nase y". Man denke über die Bedeutung der beiden Aussagen $\forall x: \exists y: \; P(x, y)$ und $\exists y: \; \forall x: \; P(x, y)$ nach. $\diamondsuit$

Bei der Negation von Aussagen mit Quantoren müssen alle Allquantoren durch Existenzquantoren ersetzt werden und umgekehrt.

Beispiel: $\neg(\forall x: \exists y: \; P(x, y)) \Longleftrightarrow (\exists x: \; \forall y: \; \neg P(x, y))$. Die Verneinung der Aussage „Jeder Mensch hat eine Nase" ist „Es gibt einen Menschen, der keine Nase hat". $\diamondsuit$

1.3 Übersicht über die Zahlensysteme

Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \cdots\}, \\ \mathbb{N}_0 &= \{0, 1, 2, 3, \cdots\} \end{aligned}$$

Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$$

Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ besteht aus $\mathbb{Z}$ und der Menge aller Brüche von Elementen aus $\mathbb{Z}$,

$$\mathbb{Q} = \Big\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \Big\}.$$

Reduzierter Bruch: $x = \frac{p}{q}$, mit p und q teilerfremd und q positiv. Diese Darstellung ist eindeutig.
Dezimaldarstellung einer rationalen Zahl:

1. Entweder endlicher Dezimalbruch (z.B. $\frac{1}{4} = 0,25$) oder
2. unendlicher periodischer Dezimalbruch (z.B. $\frac{10}{44} = 0,227272\cdots = 0,2\overline{27}$).

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ besteht aus den rationalen Zahlen und den irrationalen Zahlen, das sind die unendlichen, nichtperiodischen Dezimalbrüche. Hinsichtlich der irrationalen Zahlen unterscheidet man:

1. Algebraisch irrationale Zahlen: x ist eine algebraisch irrationale Zahl , wenn x Lösung einer algebraischen Gleichung mit *ganzzahligen* Koeffizienten ist. So eine Gleichung hat die Form

   $$\begin{aligned} a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n &= 0, \\ n \in \mathbb{N}, \quad a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

   Beispiel: $x^2 - 2 = 0$; die Lösungen $x = \pm\sqrt{2}$ sind algebraisch irrational. $\diamondsuit$

2. Transzendente Zahlen: irrational, aber nicht algebraisch irrational.

   Beispiel: π, e. $\diamondsuit$

Die reellen Zahlen werden in Kapitel 3 im Detail besprochen. Wo in den ersten beiden Kapiteln mit reellen Zahlen gearbeitet wird, reichen Mittelschulkenntnisse aus.

Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

Menge aller Zahlen $z = x + iy$ mit x, $y \in \mathbb{R}$. Dabei ist i die imaginäre Einheit. Die komplexen Zahlen werden in Kapitel **??** genauer besprochen.

1.4 Summenzeichen und Produktzeichen

Summenzeichen:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

In Worten: Summe über die a_k von $k = m$ bis n; k ist der Summationsindex.

Beispiel: $a_k = k$: $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$. $\diamondsuit$

Beispiel:

$$\sum_{k=0}^{n} x^{k+1} = x^{0+1} + x^{1+1} + \cdots + x^{n+1} = x^1 + x^2 + \cdots + x^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} x^k.$$

$\diamondsuit$

Regeln:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} a_k &= \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} \\ \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k &= \sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) \\ a \sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} (a\, a_k) \end{aligned}$$

Produktzeichen:

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := a_m a_{m+1} a_{m+2} \cdots a_n, \quad m \leq n.$$

Beispiel: $\prod_{k=3}^{6} k^2 = 9 \cdot 16 \cdot 25 \cdot 36$. $\diamondsuit$

1.5 Vollständige Induktion

Prinzip der vollständigen Induktion

Will man eine Aussage $A(n)$ für jede natürliche Zahl $n \geq n_0$ beweisen, so geht man folgend vor:

1. *Induktionsanfang*: Man zeigt die Richtigkeit von $A(n_0)$.
2. *Induktionsschluß*:Man zeigt, daß aus der Richtigkeit von $A(n)$ für beliebiges n, $n \geq n_0$, die Richtigkeit von $A(n+1)$ folgt.

Beispiel: Man beweise, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$A(n) : 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Beweis mittels vollständiger Induktion:

1. *Induktionsanfang*: $n_0 = 1$. Die Richtigkeit von $A(1)$ ist zu zeigen:
$1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$.
2. *Induktionsschluß*: Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte $A(n)$:
$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{1}{2}n(n+1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{1}{2}n(n+1) + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{1}{2}(n+1)((n+1)+1). \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Beispiel: Man beweise, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 10$ gilt: $2^n > n^3$:

1. *Induktionsanfang*: $n_0 = 10 : 1024 > 1000$.
2. *Induktionsschluß*: Es gelte $2^n > n^3$. Die Abschätzung
$2^{n+1} > 2n^3 = n^3 + n^3 = n^3 + (n-1)n^2 + (n-1)n + n > n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$, die für $n > 4$ gilt, zeigt die Richtigkeit der Aussage für $n+1$. (Der Induktionsschluß ist daher bereits ab $n > 4$ durchführbar).

$\diamondsuit$

Die geometrische Summenformel

Satz 1.5.2: *Für alle reellen Zahlen $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Beweis: Mittels vollständiger Induktion.

1. *Induktionsanfang*: $\sum_{k=0}^{1} q^k = 1 + q = \frac{(1+q)(1-q)}{1-q} = \frac{1-q^2}{1-q}$

2. *Induktionsschluß*: Es gelte $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Dann folgt aus $\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}(1-q)}{1-q} =$
$= \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$. die Richtigkeit der Behauptung für $n+1$.

qed.

1.6 Rekursive Definition

Das Prinzip der vollständigen Induktion wird in Definitionen verwendet, die von natürlichen Zahlen abhängen.

Beispiel: Unter der n-ten Potenz einer reellen Zahl x versteht man

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{ist} \quad x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n-mal} .$$

Eine formale Definition erhält man durch vollständige Induktion: Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei die n-te Potenz x^n von x definiert durch

$$\begin{aligned} x^1 &:= x, \\ x^{n+1} &:= x^n x. \end{aligned}$$

(Man definiert außerdem $x^0 := 1$, $x \neq 0$). ◊

Beispiel: Definition der *Fakultät.* Für $n \in \mathbb{N}$ wird die natürliche Zahlen $n!$ (n-Fakultät, n-faktorielle) durch rekursiv definiert

$$1! := 1, \quad \text{und} \quad (n+1)! := n!(n+1)$$

rekursiv definiert. Außerdem definiert man $0! := 1$. Explizit gilt:

$$\begin{aligned} &1! = 1, \\ &2! = 1 \cdot 2 = 2, \\ &3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \\ &n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n, \end{aligned}$$

◊

1.7 Der Binomialkoeffizient

Definition 1.7.1: *Für n und $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$ ist der* Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ *definiert durch*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Beispiel:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2!4!} = \frac{30}{2} = 15.$$

$\diamondsuit$

Allgemein: Indem man in $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ den Faktor $(n-k)!$ gegen einen Teil der Faktoren in $n!$ kürzt, erhält man

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1.2\cdots k}.$$

Eigenschaften:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$$

Additionstheorem des Binomialkoeffizienten

Satz 1.7.3: *Für $n, k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$ gilt*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Beweis:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

$$\frac{n!k + n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.$$

qed.

Diese Beziehung liegt dem *Pascal'schen Dreieck* zugrunde:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & & & \searrow \; \swarrow & & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & & & \searrow \; \swarrow & & \searrow \; \swarrow & & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
 & & \searrow \; \swarrow & & \searrow \; \swarrow & & \searrow \; \swarrow & & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & & & & \ldots & & & &
\end{array}
$$

Pascal'sches Dreieck:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & & & \searrow \; \swarrow & & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & & & \searrow \; \swarrow & & \searrow \; \swarrow & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
 & & \searrow \; \swarrow & & \searrow \; \swarrow & & \searrow \; \swarrow & & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \ldots & & & &
\end{array}
$$

Die Binomialkoeffizienten sind auch die Koeffizienten in der Entwicklung von $(x+y)^n$. Es gilt

Satz 1.7.4: *(Binomischer Lehrsatz) Für alle x, $y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Beweis: Mittels vollständiger Induktion.

1. *Induktionsanfang:* $\displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x^1 y^0 + \binom{1}{1} x^0 y^1 = (x+y)^1.$

2. *Induktionsschluß:* Es gelte $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$. Multiplizieren dieser Gleichung mit $(x+y)$ ergibt:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^k \\
&= \binom{n}{0} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^k \\
&\quad + \binom{n}{n} x^0 y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] x^{n-k+1} y^k + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n-k+1} y^k + y^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n-k+1} y^k + \binom{n+1}{n+1} x^0 y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n-k+1} y^k.
\end{aligned}
$$

qed.

Kapitel 2

Grundlagen der Mengenlehre

2.1 Einführung

Definition 2.1.1: *(Cantor'sche Definition einer Menge) Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.*

Die Objekte, die zu einer Menge zusammengefaßt sind, heißen Elemente *dieser Menge.*

Beispiel: Menge der natürlichen Zahlen ◊

Beispiel: Menge aller Primzahlen ◊

Beispiel: Die Menge, die aus den Zahlen 5, 10, 17, −16 besteht. ◊

Bezeichnung von Mengen

1. Explizite Angabe der Elemente zwischen geschwungenen Klammern (enumerative Methode).

   Beispiel: $M = \{5, 10, 17, -16\}$. ◊

2. Angabe charakteristischer Eigenschaften aller Elemente (deskriptive Methode).

   Beispiel: $\mathbb{P} := \{n : n \text{ ist Primzahl}\}$. ◊

Schreibweise:

$$x \in M, \quad x \text{ ist Element von } M.$$
$$x \notin M, \quad x \text{ ist nicht Element von } M.$$

Definition 2.1.2: *Eine Menge A heißt* Teilmenge *einer Menge B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist. Man schreibt $A \subseteq B$.*
Sprechweise: „A ist Teilmenge von B“, „A ist enthalten in B“, „B enthält A“,.

Beispiel: $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$ ♢

Beispiel: $A \subseteq B$ für Punktmengen der Ebene, siehe Abb. 2.1 ♢

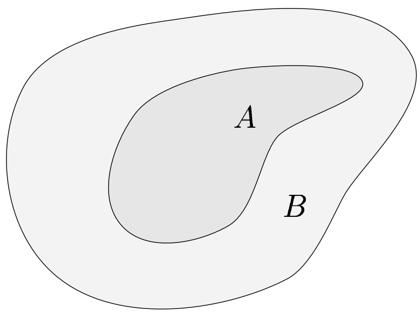

Abbildung 2.1: A, B ... Punktmengen der Ebene; $A \subset B$

Beispiel: $A = \{2, 5, 7, 11\}$, $A \subseteq \mathbb{P}$ ♢

Definition 2.1.3: *Die Menge ohne Elemente heißt* leere Menge $\emptyset$.

Bemerkung: Jede Menge enthält die leere Menge und die Menge selbst als Teilmengen. ♠

Definition 2.1.4: *Die Mengen A und B heißen* gleich ($A = B$)*, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ gilt.*

Ist A Teilmenge von B, aber $B \not\subseteq A$, so sagt man, „A ist eine echte Teilmenge von B“. Wenn man diese Eigenschaft hervorheben möchte, schreibt man $A \subset B$.

Transitivität der Inklusion: Aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ folgt $A \subseteq C$.

Definition 2.1.5: *Für eine beliebige Menge A ist die* Potenzmenge *von A die Menge aller Teilmengen von A. Die Potenzmenge von A wird mit $P(A)$ bezeichnet.*

Beispiel: $A = \{1, 2\}, \quad P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ ♢

2.2 Mengenoperationen

1. *Vereinigung* von A und B: $A \cup B := \{x : (x \in A) \text{ oder } (x \in B)\}$, $x \in (A \cup B) \Longleftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$.

2. *Durchschnitt* von A und B: $A \cap B := \{x : (x \in A) \text{ und } (x \in B)\}$, $x \in (A \cap B) \Longleftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$.

3. *Differenz* von B und A: (Sprechweise: „B ohne A“), $B \setminus A := \{x : (x \in B) \text{ und } (x \notin A)\}$

4. Im Falle, daß $A \subseteq B$ definiert man die *Komplementbildung* bezüglich der Grundmenge B: $A^c := \{x : (x \in B) \text{ und } (x \notin A)\} = B \setminus A$. Die Menge A^c nennt man das Komplement von A in B.

5. *Produktmenge* von A und B: $A \times B := \{(a, b) : (a \in A) \text{ und } (b \in B)\}$. $A \times B$ ist die Menge aller geordneten Paare von Elementen aus A und B (Sprechweise: „A Kreuz B“).

Beispiel: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{u, v\}$,
$A \times B = \{(1, u), (1, v), (2, u), (2, v), (3, u), (3, v)\}$ ◊

Rechenregeln der Mengenalgebra

1. $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$ (Kommutativität)

2. $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$

3. $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$

4. $B \subseteq A \Longleftrightarrow A \cap B = B \Longleftrightarrow A \cup B = A$

5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (Assoziativität)

6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Distributivgesetze)

Die De Morgan'schen Regeln

$$\begin{aligned} (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \\ (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c. \end{aligned}$$

2.3 Abbildungen von Mengen

Definition 2.3.6: *Eine* Abbildung (Funktion) $f : A \to B$ *ist eine Vorschrift, die jedem Element* $a \in A$ *genau ein Element* $b \in B$ *zuordnet. Schreibweise:* $b = f(a)$.

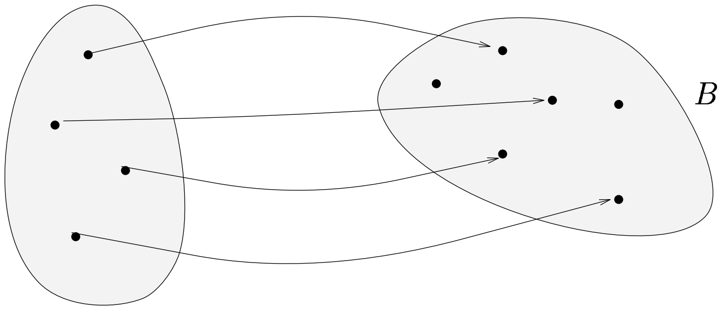

Abbildung 2.2: Injektive Abbildung: Bei jedem $b \in B$ endet höchstens ein Pfeil.

Definition 2.3.7: *Eine Abbildung heißt* injektiv *(eineindeutig), wenn für alle* $a_1, a_2 \in A$ *gilt:* $a_1 \neq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$, *d.h. zu jedem* $b \in B$ *gibt es* höchstens *ein* $a \in A$ *mit* $b = f(a)$.

Definition 2.3.8: *Eine Abbildung heißt* surjektiv, *wenn jedes Element von* B *als Bild eines Elementes von* A *auftritt:* $\forall b \in B\ \exists a \in A$ *mit* $b = f(a)$. *In Worten: Zu jedem* $b \in B$ *gibt es* mindestens *ein* $a \in A$ *mit* $b = f(a)$.

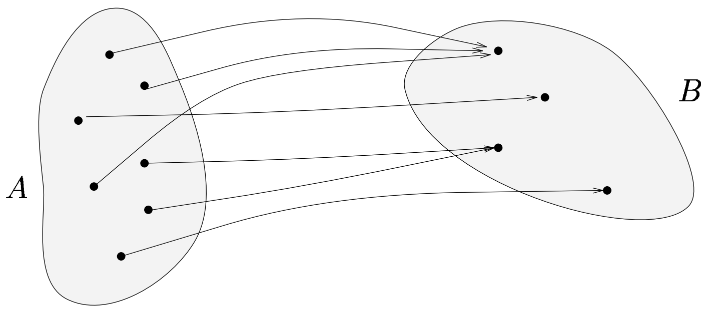

Abbildung 2.3: Surjektive Abbildung: Bei jedem $b \in B$ endet mindestens ein Pfeil.

Definition 2.3.9: *Eine Abbildung, die sowohl injektiv als auch surjektiv ist, heißt* bijektiv. *Mit anderen Worten: Zu jedem* $b \in B$ *gibt es* genau *ein* $a \in A$ *mit* $b = f(a)$.

Definition 2.3.10: $f : A \to B$ *sei bijektiv. Dann nennt man die Funktion*

$$f^{-1} : B \to A, \quad f^{-1}(b) = a \Longleftrightarrow f(a) = b.$$

die Umkehrfunktion *(inverse Funktion, inverse Abbildung) von f. Die Umkehrfunktion f^{-1} ist ebenfalls bijektiv.*

2.4 Äquivalenz von Mengen

Definition 2.4.11: *Zwei Mengen A und B heißen* äquivalent *(oder gleichmächtig), wenn es eine bijektive Abbildung von A auf B gibt (symbolisch $A \sim B$).*

Beispiel:

$$\begin{array}{rcllll} A & = & \{1, & 2, & 3, & 4\} \\ & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ B & = & \{a, & b, & c, & d\} \end{array}$$

Eine andere Möglichkeit wäre: $1 \leftrightarrow b$, $2 \leftrightarrow a$, $3 \leftrightarrow d$, $4 \leftrightarrow c$. Tatsächlich gibt es 4! verschiedene bijektive Abbildungen von A auf B. (Warum?) $\Diamond$

Beispiel: $\mathbb{N}_0 \sim \mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Zuordnung: $1 \leftrightarrow 0$, $2 \leftrightarrow 1, \ldots n \leftrightarrow (n-1), \ldots$. $\Diamond$

Beispiel: $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcllllllll} \mathbb{N} & = & \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \ldots\} \\ & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \mathbb{Z} & = & \{0, & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & \ldots\} \end{array}$$

Zuordnung:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & & \mathbb{Z} \\ n \text{ (gerade)} & \longleftrightarrow & \frac{n}{2} \\ n \text{ (ungerade)} & \longleftrightarrow & -\frac{n-1}{2} \end{array}$$

$\Diamond$

Beispiel: $\mathbb{Q}_+ := \{r \in \mathbb{Q} : \ r > 0\} \sim \mathbb{N}$: Zum Beweis werden die Elemente von

$\mathbb{Q}_+$ folgendermaßen angeschrieben:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \rightarrow & \frac{4}{1} & & \frac{5}{1} \; \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & & \frac{5}{2} \; \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & & \frac{5}{3} \; \cdots \\
& \swarrow & & & & & & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4} & & \frac{5}{4} \; \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \; \ddots
\end{array}
$$

Danach wird in Pfeilrichtung vorgegangen, wobei jedes Element, das bereits einmal gezählt wurde, ausgelassen wird: *Erstes Cantor'sches Diagonalverfahren.* $\diamondsuit$

Definition 2.4.12: *Eine Menge heißt* endlich*, wenn sie äquivalent zu einer Menge* $\{1, \ldots, n\}$*,* $n \in \mathbb{N}$ *ist. Die* Mächtigkeit *einer endlichen Menge ist gleich der Anzahl ihrer Elemente.*

Eine Menge, die äquivalent zu $\mathbb{N}$ *ist, heißt* abzählbar unendlich *oder kurz* abzählbar.

Eine Menge, die entweder endlich oder abzählbar unendlich ist, heißt höchstens abzählbar.

Beispiel: In Kapitel 3 werden wir zeigen daß $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist. $\diamondsuit$

Satz 2.4.1: *Die Vereinigung von höchstens abzählbar vielen höchstens abzählbaren Mengen ist selbst wieder höchstens abzählbar.*

Beweis: Erstes Cantor'sches Diagonalverfahren:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
M_1 & = & \{a_1^1 & \rightarrow & a_2^1 & & a_3^1 & \rightarrow & a_4^1 & \cdots\} \\
& & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
M_2 & = & \{a_1^2 & & a_2^2 & & a_3^2 & & a_4^2 & \cdots\} \\
& & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
M_3 & = & \{a_1^3 & & a_2^3 & & a_3^3 & & a_4^3 & \cdots\} \\
& & & \swarrow & & & & & & \\
M_4 & = & \{a_1^4 & & a_2^4 & & a_3^4 & & a_4^4 & \cdots\} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

qed.

Kapitel 3

Die reellen Zahlen

3.1 Einführung

In diesem Abschnitt werden die reellen Zahlen auf zwei verschiedene Arten eingeführt, und dann wird die Äquivalenz der beiden Zugänge gezeigt.

Dezimalbruchdarstellung

Wir betrachten zuerst die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die Frage der Dezimalbruchdarstellung einer rationalen Zahl.

Hilfssatz: Es sei $q \in \mathbb{Q}$, $0 < q < 1$. Dann strebt die Summe

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \cdots + q^n,$$

wenn n über alle Grenzen wächst, gegen die Zahl $\frac{1}{1-q} \in \mathbb{Q}$. Dies schreibt man als

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Beweis: Aus

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}$$

folgt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k - \frac{1}{1-q} = -\frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Mit $n \to \infty$ strebt q^{n+1} und somit $\frac{-q^{n+1}}{1-q}$ gegen Null, woraus das Ergebnis folgt.
qed.

Wir haben bei der Formulierung dieses Hilfssatzes einiges aus der Theorie der rationalen Zahlen benützt, das nicht elementar ist; man kann also kaum von einem Beweis sprechen, sondern muß den Satz und die Beweisschritte wohl intuitiv aktzeptieren.

Beispiel: Wir zeigen, daß

$$0.999\ldots = 1.$$

Der Hilfssatz liefert

$$\begin{aligned} 0.999\ldots &= 0.9(1 + 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \cdots) \\ &= 0.9 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 0.9 \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 0.9 \frac{10}{9} = 1. \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Wir zeigen jetzt, daß jede rationale Zahl, d.h. jeder Quotient von zwei ganzen Zahlen, ein endlicher Dezimalbruch oder ein unendlicher (nicht abbrechender) periodischer Dezimalbruch ist. Um eine eindeutige Dezimalbruchdarstellung zu erhalten, muß man dabei einen unendlichen Bruch, der mit einer unendlichen Folge von Neunern endet, dem obigen Beispiel entsprechend zu einem endlichen Bruch machen, z.B.:

$$6.245999\ldots = 6.246\,.$$

Zuerst illustrieren wir die Umwandlung eines Dezimalbruches in die Quotientendarstellung.

Beispiel: $9.74 = 9 + \frac{7}{10} + \frac{4}{100} = \frac{900+70+4}{100} = \frac{974}{100} = \frac{487}{50}$. $\diamondsuit$

Beispiel:

$$\begin{aligned} 0.227272\ldots &= 0.2\overline{27} = 0.2 + 27 * (10^{-3} + 10^{-5} + \cdots) \\ &= 0.2 + 27 * 10^{-3} * (1 + 10^{-2} + 10^{-4} + \cdots)\,. \end{aligned}$$

Aus dem Hilfssatz folgt

$$1 + 10^{-2} + 10^{-4} + \cdots = 1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{100}{99}\,.$$

Das gibt

$$0.2\overline{27} = 0.2 + \frac{27}{1000}\frac{100}{99} = \frac{2}{10} + \frac{3}{110} = \frac{25}{110} = \frac{5}{22}\,.$$

◊

Jetzt demonstrieren wir an einem Beispiel die Umwandlung von der Quotientendarstellung in die Dezimaldarstellung.

Beispiel:

$$\begin{array}{l} 487 : 50 = 9.74 \\ \underline{37}0 \\ \underline{20}0 \\ 00 \end{array}$$

Die Division geht nach endlich vielen Schritten (hier drei) auf: Endlicher Dezimalbruch. ◊

Beispiel:

$$\begin{array}{l} 5 : 22 = 0.22727272\ldots = 0.2\overline{27} \\ \underline{6}0 \\ \underline{16}0 \\ \underline{6}0 \\ \ddots \end{array}$$

Als Rest bei jedem Schritt der Division können nur die Zahlen 0 bis 21 auftreten. Die Division geht also entweder nach endlich vielen Schritten auf (was hier nicht der Fall ist), oder es entsteht ein unendlicher Dezimalbruch mit einer Periode von maximal 21. Die Periode ist hier 2. ◊

Die Menge der rationalen Zahlen entspricht also genau der Menge der endlichen und der unendlichen periodischen Dezimalbrüche. Wir nennen nun die unendlichen nicht periodischen Dezimalbrüche *irrationale Zahlen* und die Vereinigung der rationalen und der irrationalen Zahlen die *reellen Zahlen*. Die Menge $\mathbb{R}$ ist also die Menge aller endlichen und unendlichen Dezimalbrüche.

Die Zahlengerade

Wir wählen auf einer Geraden g zwei beliebige Punkte, die wir mit 0 und E bezeichnen. Positive Orientierung von 0 nach E (Einheitsstrecke). Durch einfache

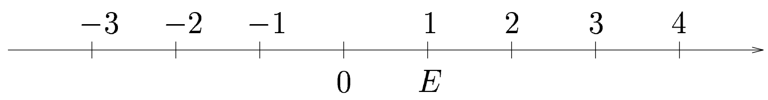

Abbildung 3.1: Zahlengerade

geometrische Konstruktionen erhalten wir:

1. Ganzzahlige Punkte
2. Rationale Punkte $\frac{p}{q}$. Diese liegen auf der Zahlengeraden „überall dicht“, d.h. beliebig nahe zu jedem Punkt auf der Zahlengeraden gibt es einen rationalen Punkt.

„Dilemma der griechischen Mathematik“: Die Zahl, deren Quadrat 2 ergibt, ist nicht rational. *Pythagoreischer Lehrsatz*:

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad a = 1,\, b = 1, \Longrightarrow c^2 = 2$$

Behauptung: $\quad c^2 = 2 \Longrightarrow c \notin \mathbb{Q}$.

Beweis: (indirekt) Annahme: $c = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, mit p, q teilerfremd. Aus $c^2 = \frac{p^2}{q^2}$, $p^2 = 2q^2$ folgt, daß p gerade sein muß, d.h. $p = 2r$. Es folgt weiters: $4r^2 = 2q^2$, $2r^2 = q^2$, also muß q gerade sein. p und q sind somit gerade, daher nicht teilerfremd, ein Widerspruch. Die Annahme $c \in \mathbb{Q}$ war also falsch. qed.

Wir wissen also, daß es neben den rationalen Punkten noch andere Punkte auf der Zahlengeraden geben muß und nennen diese Punkte irrational. Unser Ziel ist zu zeigen, daß die oben definierten reellen Zahlen genau den Punkten auf der Zahlengeraden entsprechen. Dazu ist aber unser Begriff von der Zahlengeraden noch zu unbestimmt.

Für unsere weiteren Überlegungen benötigen wir den Begriff einer *rationalen Intervallschachtelung:* Es seien $p, q \in \mathbb{Q}$, mit $p < q$. Als Intervall $[p, q]$ mit den Endpunkten p, q bezeichnen wir die Menge aller Punkte auf der Zahlengeraden, die zwischen p und q liegen einschließlich der beiden Endpunkte. Die Länge von $[p, q]$ ist $l = q - p$.

Sei $[p_1, q_1], [p_2, q_2], \ldots$ eine Folge von Intervallen, und es gelte

1. $p_n \leq p_{n+1} < q_{n+1} \leq q_n$, $n = 1, 2, \ldots$, d.h. jedes Intervall ist im vorhergehenden enthalten.
2. Die Längen der Intervalle werden mit zunehmendem n beliebig klein, d.h. die Folge der Intervallängen strebt mit $n \to \infty$ gegen Null.

Dann nennt man die betrachtete Folge von Intervallen eine Intervallschachtelung.

Nun ergänzen – oder besser gesagt präzisieren – wir unsere Vorstellung von der Zahlengeraden durch das

Intervallschachtelungsaxiom: *Sei* $[p_1, q_1], [p_2, q_2], \ldots$ *eine rationale Intervallschachtelung. Dann gibt es einen und nur einen Punkt der Zahlengeraden, der in allen Intervallen enthalten ist.*

Mit Hilfe dieses Axiomes kann man beweisen:

Satz 3.1.1: *Jedem Punkt der Zahlengeraden entspricht genau eine reelle Zahl.*

Beweis: (Skizze)

1. Wir beginnen mit der Zuordnung Punkt $\to$ Zahl: Zu jedem Punkt P auf g gibt es zwei rationale Punkte p_1, q_1, so daß p_1 links von P und q_1 rechts von P liegt. Wir schauen uns jetzt den Punkt $r = \frac{p_1+q_1}{2}$ an. Falls $r = P$, sind wir fertig. Falls r links von P liegt, setzen wir

   $$p_2 = r, \quad q_2 = q_1,$$

   andernfalls setzen wir

   $$p_2 = p_1, \quad q_2 = r.$$

   Dies definiert eine rationale Intervallschachtelung $[p_n, q_n], n = 1, 2, \ldots$, mit der Eigenschaft, daß jedes Intervall den Punkt P enthält. Gemäß dem Intervallschachtelungsaxiom ist das der einzige Punkt mit dieser Eigenschaft. In der Dezimaldarstellung von p_n und q_n stimmen für wachsendes n mehr und mehr Stellen überein, und die Dezimaldarstellung von p_n (oder q_n) „strebt" gegen die dem Punkt P entsprechende reelle Zahl. Man kann leicht zeigen, daß zwei verschiedenen Punkten zwei verschiedene Zahlen entsprechen, die Zuordnung Punkt $\to$ Zahl ist also injektiv.

2. Wir zeigen jetzt noch, daß sie surjektiv ist, daß also jede Zahl durch einen Punkt definiert ist. Dazu geben wir zuerst eine Konstruktion an, die von einer Zahl auf einen Punkt führt. Die Zahl sei

   $$x = a.a_1a_2a_3\ldots.$$

   Die Folge der Intervalle

   $$I_n = [a.a_1a_2\ldots a_n, a.a_1a_2\ldots a_n + 10^{-n}]$$

   ist eine rationale Intervallschachtelung und definiert somit einen Punkt der Zahlengeraden. Wendet man auf diesen Punkt die unter (1) angegebene Konstruktion an, so erhält man wieder die Zahl x.

qed.

Beispiel: Wir zeigen jetzt an einem Beispiel, wie die Intervallschachtelung zur Berechnung von $\sqrt{2}$ verwendet werden kann. Zuerst suchen wir ein Intervall, in dem $x = \sqrt{2}$ enthalten ist:

$$1,4 < x < 1,45 \Longleftrightarrow 1,96 < 2 < 2,1025.$$

Halbierung des Intervalls: $x_1 = \frac{1,4+1,45}{2} = 1,425$ und $x_1^2 = 2,030625 > 2$ ergibt

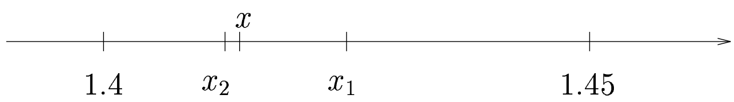

Abbildung 3.2:

ein neues Intervall für x: $1,4 < x < 1,425$. Neuerliche Halbierung: $x_2 = \frac{1,4+1,425}{2} = 1,4125$ und $x_2^2 = 1,999515625 < x^2$ impliziert: $1,4125 < x < 1,425$. Durch fortgesetzte Halbierung kann $x = \sqrt{2}$ auf beliebig viele Stellen genau berechnet werden ($\sqrt{2} = 1,4142136\ldots$). $\diamondsuit$

Die Mächtigkeit der reellen Zahlen

Satz 3.1.2: *Die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar.*

Beweis: (Zweites Cantor'sches Diagonalverfahren) Wir zeigen indirekt, daß die reellen Zahlen zwischen 0 und 1 nicht durchnumeriert werden können: Angenommen, sie könnten durchnumeriert werden,

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0, a_1^1 a_2^1 a_3^1 a_4^1 \ldots a_n^1 \ldots \\ x_2 & = & 0, a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 \ldots a_n^2 \ldots \\ & \vdots & \\ x_n & = & 0, a_1^n a_2^n a_3^n a_4^n \ldots a_n^n \ldots \\ & \vdots & \end{array}$$

Dann konstruieren wir eine Zahl x, $x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ mit $a_n \neq a_n^n$, $a_n \neq 0$, $a_n \neq 9$. Diese Zahl x stimmt mit keiner der Zahlen x_n in der Anordnung überein; ist also darin nicht enthalten. Laut Annahme müßte sie aber in der Anordnung enthalten sein, ein Widerspruch. qed.

Die Menge der positiven reellen Zahlen bezeichnen wir im weiteren mit $\mathbb{R}_+$.

3.2 Rechengesetze

Die Addition und Multiplikation von reellen Zahlen kann mittels rationaler Intervallschachtelungen auf das (bekannte) Rechnen mit rationalen Zahlen zurückgeführt werden.

Es gilt: $\mathbb{R}$ ist abgeschlossen hinsichtlich der *Addition* und der *Multiplikation*, d.h.

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \quad x + y \in \mathbb{R}, \quad xy \in \mathbb{R}\ .$$

Damit übertragen sich alle Rechengesetze der Addition und Multiplikation von rationalen Zahlen auf reelle Zahlen. Daher gilt:

Satz 3.2.3: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *ist ein Körper.*

Ungleichungen

Unter einer Relation auf einer Menge M verstehen wir eine Menge $R \subseteq M \times M$. Für $(x, y) \in R$ sagen wir x steht in der Relation R zu y, abgekürzt xRy,

Der den Ungleichungen zugrunde liegende mengentheoretische Begriff ist die Halbordnungsrelation.

Definition 3.2.1: *Eine Relation R auf einer Menge M ist eine* Halbordnungsrelation*, wenn für alle a, b, $c \in M$ gilt:*

$$\begin{aligned} aRa, & \qquad \textit{(Reflexivität)} \\ (aRb \wedge bRc) \Longrightarrow aRc, & \qquad \textit{(Transitivität)} \\ (aRb \wedge bRa) \Longrightarrow a = b, & \qquad \textit{(Antisymmetrie)} \end{aligned}$$

Definition 3.2.2: *Eine halbgeordnete Menge, in der zwei Elemente stets vergleichbar sind, in der also für jedes Paar a, $b \in M$ entweder aRb oder bRa gilt, heißt* geordnete Menge .

Beispiel: Die Menge $\mathbb{N}$ ist mit der durch

$$m \leq n \Longleftrightarrow n = m + k, \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

definierten Halbordnungsrelation „$\leq$“ geordnet. ♢

Beispiel: Die folgende Menge ist nicht geordnet: Für $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ gelte: $x \leq y \Leftrightarrow x_1 \leq y_1,\ x_2 \leq y_2$. Die Elemente $x = (3, 5)$ und $y = (6, 4)$ sind nicht vergleichbar. ♢

Für das Arbeiten mit den reellen Zahlen definieren wir zuerst die elementaren Ungleichungen

$$\begin{aligned} 0 \le x &\iff x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \\ 0 < x &\iff x \in \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

die besagen, daß x eine nicht negative bzw. eine positive Zahl ist. Dann definieren wir für Paare x, y von reellen Zahlen

$$\begin{aligned} x \le y &\iff y = x + z, \quad z \ge 0 \\ x < y &\iff y = x + z, \quad z > 0. \end{aligned}$$

Dann gilt: Die Menge $\mathbb{R}$ ausgestattet mit der Relation $\le$ ist geordnet.

Monotoniegesetze in $\mathbb{R}$

Für das Zusammenspiel der algebraischen Struktur $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit der Ordnungsstruktur $(\mathbb{R}, \le)$ gelten die folgenden Monotoniegesetze:

Für alle x, y, z, u, $v \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $x \le y \implies x + z \le y + z,$
2. $x \le y, u \le v \implies x + u \le y + v,$
3. $x < y, u \le v \implies x + u < y + v.$

4. $x \le y, z \ge 0 \implies xz \le yz,$
   $x < y, z > 0 \implies xz < yz,$
5. $x \le y, z \le 0 \implies xz \ge yz,$
   $x < y, z < 0 \implies xz > yz,$
6. $0 < x < y \iff \frac{1}{x} > \frac{1}{y}.$

Beweis: ad 1) Aus

$$x \le y \Leftrightarrow y = x + r, \quad r \ge 0$$

$$y + z = (x + r) + z = (x + z) + r$$

folgt $x + z \le y + z$. Die übrigen Aussagen werden analog bewiesen. qed.

3.3 Der Betrag

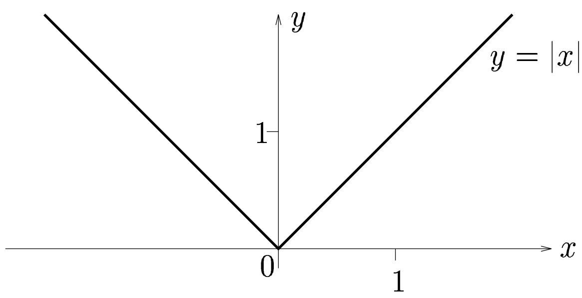

Abbildung 3.3: Der Betrag von x

Definition 3.3.3: *Für $x \in \mathbb{R}$ heißt*

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

der Betrag von x.

Der Betrag einer reellen Zahl ist ihr Abstand vom Nullpunkt. Es gilt:

$$|x| \leq a \quad \Longleftrightarrow \quad -a \leq x \leq a \ .$$

und

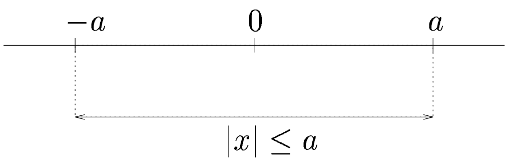

Abbildung 3.4:

$$|x - x_0| \leq a \quad \Longleftrightarrow \quad x_0 - a \leq x \leq x_0 + a \ .$$

Definition 3.3.4: *Für $x \in \mathbb{R}$ heißt*

$$\operatorname{sign} x := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

das Signum *(Vorzeichen) von x.* Natürlich gilt: $x = \operatorname{sign} x \, |x|$.

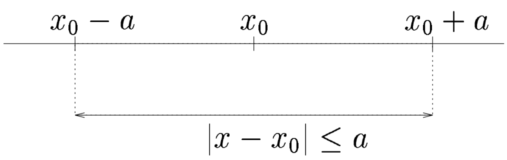

Abbildung 3.5:

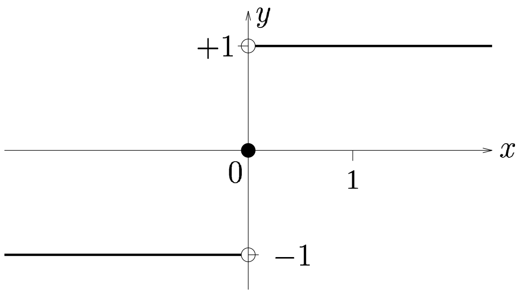

Abbildung 3.6: Signum von x

Rechengesetze für den Absolutbetrag

Satz 3.3.4: *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

1. $|xy| = |x||y|$,
2. $|x \pm y| \leq |x| + |y|$, *Dreiecksungleichung*
3. $|x \pm y| \geq ||x| - |y||$.

Beweis: Wir beweisen nur die Dreiecksungleichung. Durch Addieren der Ungleichungen

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

$$-|y| \leq y \leq |y|$$

folgt

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y| \ ,$$

was zu

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

äquivalent ist. qed.

Gauß-Klammer

Für $x \in \mathbb{R}$ bezeichnet $[x]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist. Man nennt $[x]$ die *Gauß-Klammer-Funktion*.

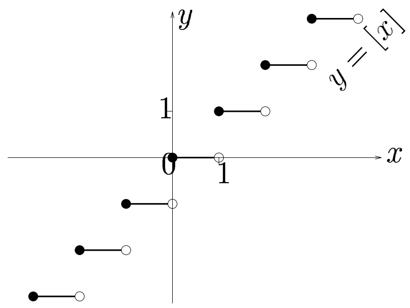

Abbildung 3.7: Graph von $[x]$

3.4 Intervalle

Intervalle sind besonders einfache Teilmengen der Zahlengeraden.

Endliche Intervalle:

Definition 3.4.5: *Es seien $a,\ b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dann heißen*

$$\begin{array}{rcll} [a,b] & := & \{x : a \le x \le b\} & \text{abgeschlossenes Intervall,} \\ (a,b) & := & \{x : a < x < b\} & \text{offenes Intervall,} \\ [a,b) & := & \{x : a \le x < b\} & \text{(rechts) halboffenes Intervall,} \\ (a,b] & := & \{x : a < x \le b\} & \text{(links) halboffenes Intervall.} \end{array}$$

Die Punkte a, b heißen Endpunkte des Intervalls, und $l = b - a$ ist die Intervalllänge.

Unbeschränkte Intervalle:

Für $a \in \mathbb{R}$ definieren wir:

$$(a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \quad [a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \ge a\}$$

$$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \quad (-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$

Beispiel: Gegeben sei folgende Ungleichung:

$$\frac{3}{|x-9|} > \frac{2}{x+2} \; .$$

Man drücke die Lösungsmenge durch Intervalle aus. Der Definitionsbereich der Ungleichung ist $D = \mathbb{R} \backslash \{-2, 9\}$. Wegen $|x-9| > 0$ ist die Ungleichung äquivalent zu

$$3 > \frac{2|x-9|}{x+2} \; .$$

Wir unterscheiden zwei Fälle nach dem Vorzeichen von $x+2$:

1. $x+2 > 0$, d.h. $x > -2$, $x \neq 9$; Wir formen die Ungleichung äquivalent um:

$$3x + 6 > |2x - 18|$$

$$-3x - 6 < 2x - 18 < 3x + 6$$

$$(12 < 5x) \wedge (-24 < x)$$

$$x > \frac{12}{5}$$

   Daher gilt $L_1 = (\frac{12}{5}, 9) \cup (9, \infty)$.

2. $x+2 < 0$, d.h. $x < -2$. Multiplikation der Ungleichung mit $x+2 < 0$ ergibt die äquivalente Ungleichung

$$3x + 6 < |2x - 18| \; .$$

   Für $x + 2 < 0$ ist $3x + 6 < 0$ daher gilt $L_2 = (-\infty, -2)$.

Insgesamt erhalten wir $L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, -2) \cup (\frac{12}{5}, 9) \cup (9, \infty)$. $\diamondsuit$

Reelle Intervallschachtelungen

Auf der Basis des Intervallschachtelungsaxioms, das für Schachtelungen von Intervallen rationaler Zahlen formuliert wurde, kann man unschwer den folgenden Satz herleiten.

Satz 3.4.5: *Sei $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$ eine unendliche Folge von abgeschlossenen Intervallen mit $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$. Es gelte*

1. *$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$, $n = 1, 2, \ldots$, d.h. jedes Intervall ist im vorhergehenden enthalten.*

2. *Die Längen der Intervalle werden mit zunehmendem n beliebig klein, d.h. die Folge der Intervallängen strebt mit $n \to \infty$ gegen null.*

Dann gibt es eine und nur eine reelle Zahl x, die in allen diesen Intervallen enthalten ist.

Mittels Intervallschachtelung beweist man die *Existenz der n - ten Wurzel*: Zu jeder positiven reellen Zahl a und zu jeder natürlichen Zahl n gibt es genau eine positive Lösung der Gleichung $x^n = a$. Man schreibt $x = \sqrt[n]{a}$, $x = a^{1/n}$. Mittels $a^{p/q} := (a^{1/q})^p = (\sqrt[q]{a})^p$ definiert man Potenzen mit *rationalen Exponenten.*

Reelle Exponenten: $b \in \mathbb{R}$ werde definiert durch die Intervallschachtelung $[r_n, s_n]$ mit r_n, $s_n \in \mathbb{Q}$. Dann bildet $[a^{r_n}, a^{s_n}]$ eine Intervallschachtelung, die a^b definiert. So zeigt man auch die Gültigkeit der folgenden Rechengesetze: Für alle $a > 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$a^b a^c = a^{b+c}, \quad (a^b)^c = a^{bc}, \quad a^{-b} = \frac{1}{a^b}.$$

Weiters gelten die Monotonieausssagen:

$$\begin{aligned} a > 1 :\ b_1 \leq b_2 \quad &\Leftrightarrow \quad a^{b_1} \leq a^{b_2}, \\ a < 1 :\ b_1 \leq b_2 \quad &\Leftrightarrow \quad a^{b_1} \geq a^{b_2}, \\ b > 0 :\ 0 < a_1 \leq a_2 \quad &\Leftrightarrow \quad a_1^b \leq a_2^b, \\ b < 0 :\ 0 < a_1 \leq a_2 \quad &\Leftrightarrow \quad a_1^b \geq a_2^b. \end{aligned}$$

3.5 Mengen von reellen Zahlen

In diesem Abschnitt werden Grundbegriffe der *Topologie* der reellen Zahlen besprochen.

Definition 3.5.6: *Es sei A eine Teilmenge von $\mathbb{R}$.*

1. *A heißt* nach oben beschränkt*, wenn es eine Zahl $K \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $x \leq K$ für alle $x \in A$ gilt. K heißt eine* obere Schranke *von A.*

2. *A heißt* nach unten beschränkt*, wenn es eine Zahl $L \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $x \geq L$ für alle $x \in A$ gilt. L heißt eine* untere Schranke *von A.*

3. *A heißt* beschränkt, *wenn A sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.*

Beispiel: $A = (a, b]$, $K = b$ oder $b + r$, $r > 0$, $L = a$ oder $a - r$, $r > 0$. $\diamondsuit$

Beispiel: $A = \{1 - \frac{1}{n}, n \in N\} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\}$, $K = 1$, $L = 0$.

Behauptung: $K = 1$ ist obere Schranke und zugleich die kleinste obere Schranke.

Die Behauptung wird indirekt bewiesen: angenommen $K' = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ wäre obere Schranke. Dann müßte gelten: $1 - \frac{1}{n} \leq 1 - \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Also $\frac{1}{n} \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Das ist gleichbedeutend mit $n \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, was falsch ist. Daher ist $K = 1$ kleinste obere Schranke. $\diamondsuit$

Definition 3.5.7: *Sei $A \subset \mathbb{R}$. Das* Supremum *von A, abgekürzt* $\sup A$*, ist die kleinste obere Schranke von A. Das* Infimum *von A, abgekürzt* $\inf A$*, ist die größte untere Schranke von A.*

Das heißt:

$s = \sup A$, wenn gilt s ist eine obere Schranke von A, und jede reelle Zahl $s' < s$ ist keine obere Schranke,

und $r = \inf A$, wenn gilt r ist eine untere Schranke von A, und jede reelle Zahl $r' > r$ ist keine untere Schranke.

Definition 3.5.8: *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Gilt $s = \sup A$ und $s \in A$, so heißt s das* Maximum *von A, $s = \max A$. Gilt $r = \inf A$ und $r \in A$, so heißt r das* Minimum *von A, $r = \min A$.*

Beispiel: Für $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ gilt $\sup A = \sqrt{2}$. Hier gilt also $\sup A \notin A$. $\diamondsuit$

Satz 3.5.6: *Jede nach oben beschränkte, nicht leere Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum. Jede nach unten beschränkte, nicht leere Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Infimum.*

Beweis: Erfolgt mittels Intervallschachtelung. qed.

Der folgende Satz gibt eine einfache Charakterisierung des Supremums und Infimums einer Menge.

Satz 3.5.7: *Für $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt:*

1. *Eine obere Schranke s von A ist genau dann das Supremum von A, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in A$ gibt, so daß $x > s - \varepsilon$ ist.*

2. *Eine untere Schranke r von A ist genau dann das Infimum von A, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in A$ gibt, so daß $x < r + \varepsilon$ ist.*

Definition 3.5.9: *Es sei $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Dann heißt das Intervall*

$$K(x,\varepsilon) := (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} : |y - x| < \varepsilon\}$$

eine ε-Umgebung von x *und die Menge*

$$K_r(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} : 0 < |y - x| < \varepsilon\}$$

eine reduzierte ε-Umgebung von x.

Mit Hilfe des Begriffs der ε-Umgebung wird die Lage und Nähe eines Punktes $x \in \mathbb{R}$ zu den Punkten einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ genauer beschrieben. Klarerweise können interessante Fragen nur im Fall einer unendlichen Menge A auftreten.

Definition 3.5.10: *Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}$ heißt*

1. innerer Punkt *von A, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß $K(x,\varepsilon) \subseteq A$.*

2. isolierter Punkt *von A, wenn $x \in A$ und es eine reduzierte ε-Umgebung $K_r(x,\varepsilon)$ gibt, so daß $K_r(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$.*

3. Häufungspunkt *von A, wenn jede ε-Umgebung von x* unendlich viele *Punkte von A enthält. Gleichbedeutend damit ist, daß jede* reduzierte *ε-Umgebung von x* mindestens einen *Punkt von A enthält.*

4. Randpunkt *von A, wenn jede ε - Umgebung $K(x,\varepsilon)$ einen Punkt von A und einen Punkt von A^c enthält.*

5. äußerer Punkt *von A, wenn x innerer Punkt von A^c ist.*

Klarerweise gilt: Jeder innere Punkt ist Häufungspunkt. Jeder isolierte Punkt ist Randpunkt.

Beispiel: Für $A = \{\frac{1}{n},\ n \in N\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ gilt:

1. A hat keine inneren Punkte.

2. Jeder Punkt von A ist isolierter Punkt.

3. Der Punkt 0 ist ein Häufungspunkt

4. Der Punkt 0 ist ein Randpunkt.

Anhand einer Skizze sind alle Aussagen unmittelbar einsichtig.

Wir beweisen die 3. Behauptung: Es sei $\varepsilon > 0 \in \mathbb{R}$. Es gilt $|x_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$. Setze $N(\varepsilon) = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ (Dabei ist $[\,]$ die Gauß Klammer). Dann gilt $\frac{1}{n} < \varepsilon$ für $n \geq N(\varepsilon)$, d.h. $x_n \in K(0, \varepsilon)$ für $n \geq N(\varepsilon)$.

Die anderen Behauptungen werden analog bewiesen. ♢

Beispiel: Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ sind a und b die Randpunkte der Intervalle (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$ und $[a, b)$. Für jedes dieser Intervalle ist die Menge der inneren Punkte gleich (a, b), die Menge der Häufungspunkte ist gleich $[a, b]$. ♢

Beispiel: $A = \{1, \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1 - \frac{1}{5}, \ldots\}$, Häufungspunkte: 0, 1; keine inneren Punkte; jeder Punkt $x \in A$, $x \neq 1$ ist isolierter Punkt. Die Menge der Randpunkte ist $A \cup \{0\}$. ♢

Definition 3.5.11: *Die Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt* offen*, wenn A nur aus inneren Punkten besteht. Die Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt* abgeschlossen*, wenn A alle Randpunkte enthält.*

Man sieht sofort: Die Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann offen, wenn die Menge A^C abgeschlossen ist.

Definition 3.5.12: *Für $A \subseteq \mathbb{R}$ sei*

1. $\overset{\circ}{A}$ *die* Menge aller inneren Punkte *von A,*
2. ∂A *die* Menge aller Randpunkte *von A,*
3. $\overline{A} := A \cup \partial A$ *der* Abschluß *von A.*

Es gilt: Die Menge $\overset{\circ}{A}$ ist offen, die Menge $\overline{A}$ ist abgeschlossen.

Das folgende Beispiel verdeutlicht nochmals die „Lage“ der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Beispiel: Für $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ gilt: $\overset{\circ}{Q} = \emptyset$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Jeder Punkt $x \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt von Q. Man sagt, Q liegt *dicht* in $\mathbb{R}$. Die Menge $\mathbb{R}$ ist der topologische Abschluß von $\mathbb{Q}$. ♢

Satz 3.5.8: *(von Bolzano - Weierstraß) Jede beschränkte unendliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat mindestens einen Häufungspunkt.*

Beweis: Die unendliche Menge A sei beschränkt, also $L \leq x \leq K$ für alle $x \in A$. Halbiert man das Intervall $[L, K]$, so müssen in mindestens einem Teilintervall unendlich viele Elemente der Menge liegen. Dieses Teilintervall wird erneut halbiert, so daß in mindestens einem der neu entstehenden Teilintervalle wieder unendlich viele Elemente der Menge liegen. Der Teilungsprozeß liefert eine Intervallschachtelung, die einen Häufungspunkt der Menge bestimmt. qed.

Kapitel 4

Zahlenfolgen

4.1 Der Begriff des Grenzwertes

Eine *Folge* ist eine Abbildung der Menge der natürlichen Zahlen in die Menge der reellen Zahlen. Jeder solchen Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ entspricht eine abzählbare Menge von reellen Zahlen $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$. Die Zahlen $a_1, a_2, \ldots$ nennt man Glieder der Folge und insbesondere a_n das allgemeine Glied. Eine Folge wird oft mit $\{a_n\}$ bezeichnet.

Beispiel: Natürliche Zahlen $\{1, 2, 3, \ldots\}$, $a_n = n$. ♢

Beispiel: $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$, $a_n = \frac{1}{n}$. ♢

Beispiel: $\{1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \ldots\}$, $a_{2m-1} = m$, $a_{2m} = \frac{1}{m+1}$. ♢

Beispiel: $\{1, -1, 1, -1, \ldots\}$, $a_n = (-1)^{n-1}$. ♢

Definition 4.1.1: *Eine Folge $\{a_n\}$ heißt* konvergent mit dem Grenzwert a, *wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index $N(\varepsilon)$ existiert, so daß $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N(\varepsilon)$ gilt*

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

In diesem Fall schreibt man

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \ .$$

Eine nicht konvergente Folge heißt divergent.

Beispiel: $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2+n}$. Wir vermuten den Grenzwert $a = 0$. Zu zeigen ist: für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein Index $N = N(\varepsilon)$, so daß $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N(\varepsilon)$ gilt

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2+n} - 0\right| = \frac{1}{n^2+n} < \varepsilon.$$

Beweis: Wir nehmen ε als vorgegeben an:

$$\frac{1}{n^2+n} < \varepsilon \Longleftrightarrow n^2+n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Wegen $n^2+n > n^2$ gilt $n^2+n > \frac{1}{\varepsilon}$ falls $n^2 > \frac{1}{\varepsilon}$. Wir werden daher mit dieser einfachen Ungleichung weiterarbeiten. $n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}$: $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1$. Es folgt für $n \geq N(\varepsilon)$: $\left|\frac{(-1)^n}{n^2+n} - 0\right| < \varepsilon$. ♢

Wenn wir im weiteren von *fast allen* Gliedern einer Folge sprechen, dann verstehen wir darunter alle bis auf eine endliche Anzahl.

Satz 4.1.1: *Ändert man endlich viele Elemente einer Folge, so ändert sich der Grenzwert nicht.*

Definition 4.1.2: *Die Folge* $\{a_n\}$ *heißt* Nullfolge, *wenn* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *gilt.*

Satz 4.1.2:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n - a) = 0.$$

Satz 4.1.3: *Ist eine Folge* $\{a_n\}$ *konvergent, so ist ihr Grenzwert eindeutig bestimmt.*

Beweis: Eine Folge $\{a_n\}$ besitze zwei Grenzwerte, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ mit $b > a$. Es sei $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Dann liegen in $K(a,\varepsilon)$ und $K(b,\varepsilon)$ fast alle Glieder der Folge. Das ist unmöglich, da $K(a,\varepsilon) \cap K(b,\varepsilon) = \emptyset$. qed.

Satz 4.1.4: *Jede konvergente Folge ist beschränkt, d.h.* $\exists A > 0$, *so daß* $|a_n| \leq A$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Zur reellen Zahl $\varepsilon = 1$ gibt es ein N, so daß für $n \geq N$ gilt $|a_n - a| < 1$. Es folgt $|a_n| < |a| + 1\, \forall n \geq N$. Daher $A = \max\{|a|+1, |a_1|, \ldots, |a_{N-1}|\}$. qed.

Definition 4.1.3: *Eine* Teilfolge *entsteht durch Weglassen gewisser Glieder der Folge, wobei jedoch noch unendlich viele Glieder übrigbleiben.*

Satz 4.1.5: *Konvergiert eine Folge* $\{a_n\}$ *gegen eine Grenzwert* a, *so konvergiert auch jede Teilfolge gegen* a.

Bemerkung: Auch eine divergente Folge kann konvergente Teilfolgen haben. ♠

Rechenoperationen für Folgen

Für zwei Folgen $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ kann man

1. die Summenfolge $\{a_n + b_n\}$,
2. die Differenzenfolge $\{a_n - b_n\}$,
3. die Produktfolge $\{a_n b_n\}$ und
4. die Quotientenfolge $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ (falls $b_n \neq 0$).

definieren.

Satz 4.1.6: *Sind die Folgen $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ konvergent mit $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, so sind auch Summe, Differenz und Produkt konvergent, und es gilt:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b.$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n = ab.$
3. *Ist $b_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$, und weiters $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, so ist $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ konvergent und* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}.$
4. *Für $c \in \mathbb{R}$ ist $\{ca_n\}$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n) = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n = ca$.*

Beispiel: $a_n = \frac{2-\frac{1}{n}(1-\frac{1}{2^n})}{3+\frac{1}{n^2}} = \frac{b_n}{c_n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 3$, $b_n = 2 - d_n e_n$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = 1$. Daher $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{2}{3}$. ♢

Der folgende Satz ist grundlegend für viele weitere Resultate.

Satz 4.1.7: *Jede beschränkte Folge $\{a_n\}$ hat eine konvergente Teilfolge.*

Beweis: Wir nehmen an, daß die Folge $\{a_n\}$ unendlich viele verschiedene Elemente enthält, sonst ist das Resultat ja selbstverständlich. Aufgrund des Satzes von Bolzano–Weierstraß hat dann die Menge $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ mindestens einen Häufungspunkt a. Wir konstruieren jetzt eine Teilfolge von $\{a_n\}$, die gegen a konvergiert. Zu $\varepsilon_1 := 1$ gibt es ein Element $a_{n_1} \neq a$ mit $|a - a_{n_1}| < \varepsilon_1$. Dann setzen wir $\varepsilon_2 := \frac{|a-a_{n_1}|}{2}$ und wissen, daß es ein Element $a_{n_2} \neq a$, $n_2 > n_1$ gibt mit $|a - a_{n_2}| < \varepsilon_2$, u.s.w.. Natürlich gilt $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. qed.

Definition 4.1.4: *Eine Folge $\{a_n\}$ ist eine* Cauchyfolge, *wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ gibt, so daß für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq N(\varepsilon)$ gilt $|a_m - a_n| < \varepsilon$.*

Beispiel: Behauptung: die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ ist eine Cauchyfolge.

Zu zeigen ist: $\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ mit $|a_m - a_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ falls $m, n \geq N(\varepsilon)$. Wir nehmen an, daß $m \leq n$. Es gilt $|a_m - a_n| \leq \left|\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right| \leq \frac{2}{m}$. Daher $|a_m - a_n| < \varepsilon$, falls $m > \frac{2}{\varepsilon}$ und folglich $N(\varepsilon) = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$. ♢

Man kann leicht zeigen, daß jede konvergente Folge eine Cauchyfolge ist. Daß auch die Umkehrung gilt ist der Inhalt des

Satz 4.1.8: *(Konvergenzkriterium von Cauchy) Eine Folge $\{a_n\}$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.*

Auf den etwas länglichen Beweis, der auf Satz 4.1.7 beruht, wird verzichtet.

Bemerkung: Man sagt, $\mathbb{R}$ ist *vollständig*, d.h. jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist konvergent mit einem Grenzwert in $\mathbb{R}$. Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist der wesentliche Grund für die Erweiterung des Zahlbegriffs von den rationalen Zahlen auf die reellen Zahlen. ♠

4.2 Monotone Folgen

Definition 4.2.5: *Eine Folge $\{a_n\}$ heißt*

monoton wachsend, *wenn* $a_n \leq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
streng *monoton wachsend, wenn* $a_n < a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
monoton fallend, *wenn* $a_n \geq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
streng *monoton fallend, wenn* $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Beispiel: $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{2^n}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ streng monoton fallend. ♢

Beispiel: $\{1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \cdots\}$, monoton fallend. ♢

Beispiel: $a_n = n$, streng monoton wachsend. ♢

Beispiel: $a_n = 1 - \frac{1}{n^2}$, streng monoton wachsend. ♢

Definition 4.2.6: *Eine Folge $\{a_n\}$ heißt* nach oben beschränkt, *wenn es eine Konstante K gibt, so daß $a_n \leq K$, $\forall n \in \mathbb{N}$;* nach unten beschränkt, *wenn es eine Konstante L gibt, so daß $L \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Der Hauptsatz über monotone Folgen

Satz 4.2.9: *Eine monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge $\{a_n\}$ ist konvergent und*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$$

Ebenso ist jede monoton fallende und nach unten beschränkte Folge $\{b_n\}$ konvergent und

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_n\}$$

Beweis: $a := \sup\{a_n\}$, d.h. $a_n \leq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$ und für beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es ein N, so daß

$$a - \varepsilon < a_N \leq a.$$

Weil $\{a_n\}$ monoton wachsend ist, muß gelten: $a_N \leq a_n$, $n \geq N$, und folglich $a - \varepsilon < a_n \leq a$, $n \geq N$. Das heißt: Ab dem Index N liegen alle Glieder a_n, $n \geq N$ in der ε - Umgebung von a. a ist also der Grenzwert der Folge $\{a_n\}$. qed.

Beispiel: $a_n = q^n$, $0 < q < 1$. Wegen $q^{n+1} = q^n q < q^n < q^0 = 1$ gilt

1. $0 < a_n < 1$ und
2. $\{a_n\}$ ist streng monoton fallend.

Folglich konvergiert $\{a_n\}$. Bestimmung des Grenzwertes $a := \lim\limits_{n\to\infty} q^n$. Die Folge $\{b_n\} = \{qa_n\}$ ist Teilfolge von $\{a_n\}$ und hat daher auch den Grenzwert a, aber natürlich auch den Grenzwert qa. Aus $a = qa$, $q \neq 1$ folgt $a = 0$. $\diamondsuit$

4.3 Das Vergleichskriterium

Satz 4.3.10: *Sind die Folgen $\{a_n\}$, $\{c_n\}$ konvergent gegen denselben Grenzwert a und gilt für eine Folge $\{b_n\} : a_n \leq b_n \leq c_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, so ist auch $\{b_n\}$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.*

Beweis: Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ gilt: $\forall \varepsilon > 0\, \exists$ zwei natürliche Zahlen N_1, N_2, so daß $|a_n - a| < \varepsilon$, $n \geq N_1$, $|c_n - a| < \varepsilon$, $n \geq N_2$. Ist $N = \max\{N_1, N_2\}$ so gilt $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, $a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$, $n \geq N$. Es folgt: $a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$, und somit $a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$, $n \geq N$, $\{b_n\}$ konvergiert also gegen a. qed.

Beispiel: $a_n = \sqrt[n]{q}$, $q > 0$. Es sei $q > 1$. Dann ist $\sqrt[n]{q} > 1$, also $\{a_n\}$ nach unten beschränkt. Wegen $1 < q^{\frac{1}{n+1}}$ gilt $q^{\frac{-1}{n+1}} < 1$ und $qq^{\frac{-1}{n+1}} < q$. Daher $q^{\frac{n}{n+1}} < q$, $q^{\frac{1}{n+1}} < q^{\frac{1}{n}}$. $\{a_n\}$ ist also streng monoton fallend. Um zu zeigen, daß $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ benötigen wir die

Bernoullische Ungleichung: Für $h > -1$, gilt

$$(1+h)^n \geq 1 + nh, \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Die Bernoullische Ungleichung wird mittels vollständiger Induktion bewiesen.

Für $n = 1$ ist die Ungleichung klarerweise erfüllt.

Die Ungleichung sei nun für ein bestimmtes n richtig. Dann folgt

$$\begin{aligned} (1+h)^{n+1} &= (1+h)(1+h)^n \\ &\geq (1+h)(1+nh) \\ &= 1 + (n+1)h + h^2 \\ &\geq 1 + (n+1)h. \end{aligned}$$

Daher gilt die Ungleichung für $n+1$ und somit für $n \in \mathbb{N}$. qed.

Fortsetzung des Beispiels: Aus der Bernoullischen Ungleichung folgt $q = (1 + (\sqrt[n]{q} - 1))^n \geq 1 + n(\sqrt[n]{q} - 1)$, $\frac{q-1}{n} \geq \sqrt[n]{q} - 1 > 0$, also $1 < \sqrt[n]{q} \leq (\frac{q-1}{n} + 1)$. Aus dem Vergleichskriterium folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. ♢

Beispiel: In den Übungen wird gezeigt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \ .$$

♢

Beispiel: $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.
Nach dem Binomischen Lehrsatz ist

$$a_n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \ .$$

Wegen

$$\frac{n(n-1)}{n^2} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} = (1 - \frac{1}{n}), \cdots, \frac{n(n-1)\cdots 2 \cdot 1}{n^n} = (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n})$$

gilt

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n}).$$

Daraus folgt

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

$\{a_n\}$ ist also nach oben beschränkt. Andererseits ist $\{a_n\}$ eine streng monoton wachsende Folge, denn a_{n+1} entsteht aus a_n, indem man die Faktoren $(1 - \frac{1}{n})$, $(1 - \frac{2}{n}), \cdots$ durch die größeren $(1 - \frac{1}{n+1})$, $(1 - \frac{2}{n+1})$ ersetzt und schließlich noch ein positives Glied dazufügt. Also ist $\{a_n\}$ als streng monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge konvergent,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e \quad \text{(Eulersche Zahl)} .$$

$\diamondsuit$

Bemerkung: e ist auch Grenzwert der Folge

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

d.h.

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$\spadesuit$

Definition 4.3.7: *Eine Folge $\{a_n\}$ heißt uneigentlich konvergent gegen ∞ oder* bestimmt divergent gegen ∞, *wenn die Folgenglieder beliebig groß werden, falls nur der Index genügend groß gewählt wird.*

Bemerkung: Das heißt $\forall K \in \mathbb{R}_+$, $\exists N = N(K)$, so daß $a_n \geq K$ für $n \geq N$. Man schreibt: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. $\spadesuit$

Beispiel: $a_n = n^2$: Bestimmt divergent gegen ∞. $\diamondsuit$

Beispiel: $\{1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \cdots\}$: Nicht konvergent, aber auch nicht bestimmt divergent. $\diamondsuit$

Beispiel: $a_n = -n^3$; $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, bestimmt divergent gegen $-\infty$. $\diamondsuit$

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.1 Allgemeines

Reelle Funktionen sind Abbildungen der Zahlengerade in die Zahlengerade:

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R} ,$$

wobei A der *Definitionsbereich* und B der *Bildbereich* der Funktion f sind. Man schreibt $x \mapsto f(x)$ oder $y = f(x)$. Die Elemente von A heißen *Argumente* oder *Urbilder* von f. Ein Element $y \in B$ mit $y = f(x)$ für $x \in A$ heißt *Bild* von x unter f oder *Funktionswert* von f an der Stelle x. Der *Wertebereich* oder das *Bild* der Funktion f ist die Menge $W_f := \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$.

Im Fall $W_f = B$ sagt man die Abbildung f ist *auf* B, im Fall $W_f \subset B$ sagt man die Abbildung f ist *in* B.

Definition 5.1.1: *Die Menge* $G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^2$ *heißt der* Graph *der Funktion* $f(x)$.

Beispiel: $f : [-2, 4) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x < \frac{1}{2} \\ 3, & x = \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} - x, & \frac{1}{2} < x < 4 \end{cases} .$$

Hier gilt also: $A = [-2, 4)$, $W_f = (-1.5, 2) \cup \{3\}$. $\diamondsuit$

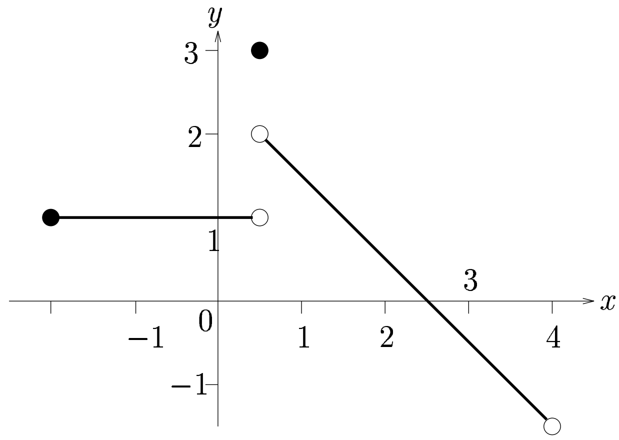

Abbildung 5.1: Graph des obigen Beispiels

5.2 Die Komposition von Funktionen

Definition 5.2.2: *Es seien $g : A \to B$ und $f : C \to D$ zwei Funktionen, und es gelte $W_g \subseteq C$. Dann ist durch*

$$x \mapsto f(g(x))$$

eine Funktion $f \circ g : A \to D$ definiert. Die Funktion $f \circ g$ heißt Komposition *von f und g.*

Bemerkung: Man spricht auch von einer *Zusammensetzung* oder *Schachtelung* der Funktionen. Dabei ist g die *innere* und f die *äußere* Funktion.

Sprechweise: „f von g“, „f angewandt auf g“.

Damit die Komposition definiert ist muß gelten $W_g \subseteq C$. Diese Bedingung ist im Fall $B = C$ immer erfüllt. ♠

Beispiel: $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$; $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\Big(\frac{1}{x}\Big) = 2\frac{1}{x} - 1 = \frac{2-x}{x}.$$

Jedoch ist $g \circ f$ nicht definiert, denn $W_f \not\subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für $x = \frac{1}{2}$ gilt ja $f(x) = 0$. ♢

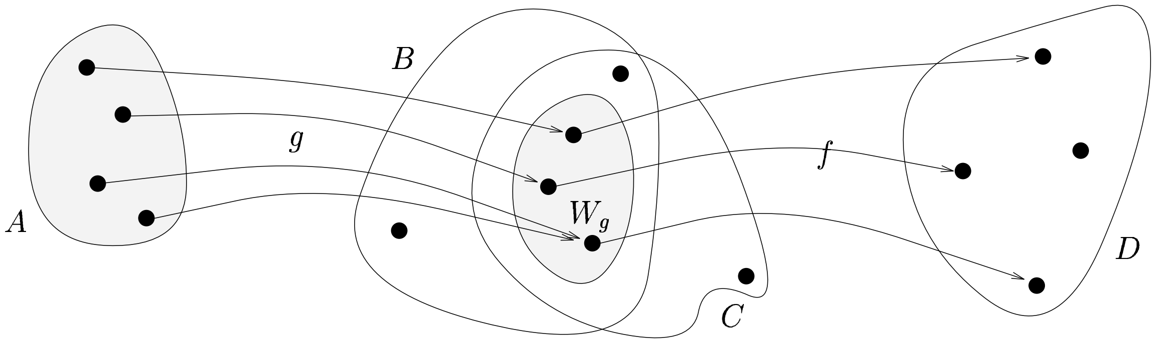

Abbildung 5.2:

5.3 Die Umkehrfunktion

Eine bijektive Funktion $f : A \to B$ besitzt eine eine *Umkehrfunktion* oder *inverse Funktion*

$$f^{-1} : B \to A,$$

die durch $f^{-1}(y) := x$, genau dann, wenn $y = f(x)$ definiert ist.

Beispiel: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x - 3$ ist bijektiv.

Bestimmung der Umkehrfunktion: $y = 2x - 3 \Leftrightarrow x = \frac{y+3}{2}$, Daher gilt:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \frac{y+3}{2}\ .$$

Die Bezeichnung der Variablen mit y ist aber nicht zwingend. Bei Verwendung von x als Argument erhalten wir das Funktionenpaar:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto= 2x - 3,$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x+3}{2}\ .$$

$\diamondsuit$

Für eine Funktion f und ihre Umkehrfunktion f^{-1} gilt stets

$$f^{-1} \circ f = id, \quad f \circ f^{-1} = id.$$

Der Graph der Umkehrfunktion

Für die graphische Darstellung der Umkehrfunktion einer reellen Funktion nehmen wir an:

$$f : A = [a, b] \to B = [f(a), f(b)] \ .$$

Der Graph der Umkehrfunktion ensteht durch Spiegelung des Graphen von f an

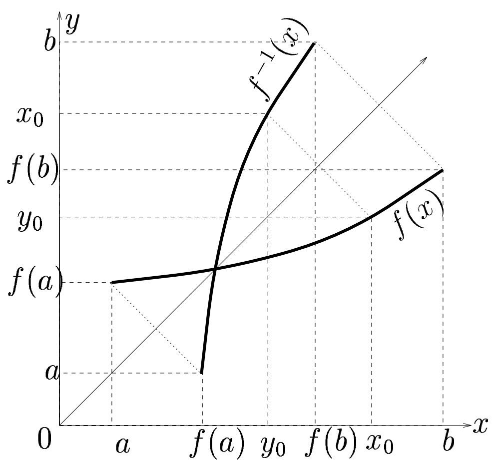

Abbildung 5.3: Graph der Umkehrfunktion

der 1. Mediane (das ist die Gerade $y = x$) in der (x, y) - Ebene.

Im Fall einer Funktion, die nicht bijektiv ist, kann man oft Teile des Definitionsbereichs und des Wertebereichs finden, auf denen die (Einschränkung der) Funktion bijektiv ist und daher eine Umkehrfunktion besitzt. Falls die ursprüngliche Funktion nicht injektiv ist, erhält man so mehrere *Zweige* der Umkehrfunktion.

Beispiel: Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x-2)^2 + 1$ ist weder surjektiv noch injektiv. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to [1, \infty)$, $x \mapsto (x-2)^2 + 1$ ist surjektiv aber nicht injektiv. Durch zerlegen des Definitionsbereiches $\mathbb{R} = (-\infty, 2] \cup [2, \infty)$ erhält man zwei bijektive Funktionen:

$$f_1 : D_1 = (-\infty, 2] \to [1, \infty), \quad x \mapsto (x-2)^2 + 1,$$

$$f_2 : D_2 = [2, \infty) \to [1, \infty), \quad x \mapsto (x-2)^2 + 1,$$

die jeweils eine Umkehrfunktion besitzen.

Aus $(x-2)^2 + 1 = y$, folgt $x = 2 \pm \sqrt{y-1}$. Daher sind

$$f_1^{-1} : [1, \infty) \to (-\infty, 2], \quad x \mapsto 2 - \sqrt{x-1},$$

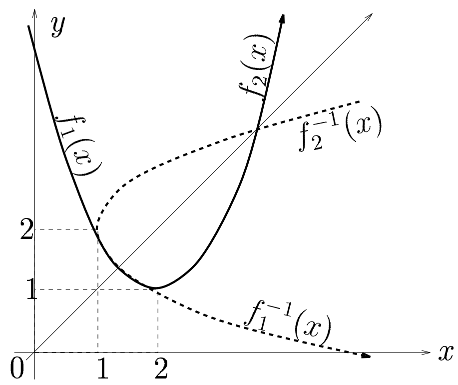

Abbildung 5.4: $f(x) = (x-2)^2 + 1$ und Zweige der Umkehrfunktion

und

$$f_2^{-1} : [1, \infty) \to [2, \infty), \quad x \mapsto 2 + \sqrt{x-1}$$

die zwei Zweige der Umkehrfunktion. $\diamondsuit$

5.4 Eigenschaften von Funktionen

Beschränktheit

Definition 5.4.3: *Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. f heißt*

1. nach oben beschränkt*, wenn es eine reelle Zahl K gibt, so daß $f(x) \leq K$, $\forall x \in A$; ($K \ldots$* obere Schranke*);*
2. nach unten beschränkt*, wenn es eine reelle Zahl L gibt, so daß $f(x) \geq L$, $\forall x \in A$; ($L \ldots$* untere Schranke*);*
3. beschränkt*, wenn f nach oben und nach unten beschränkt ist.*

Klarerweise gilt:

Satz 5.4.1: *$f : A \to \mathbb{R}$ ist genau dann beschränkt, wenn es eine reelle Zahl R gibt, so daß $|f(x)| \leq R \quad \forall x \in A$.*

Beispiel: $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ist nicht beschränkt:

$\forall R > 0 \, \exists x \in A$ mit $|f(x)| = \frac{1}{|x|} > R$, z.B. $x = \pm \frac{1}{2R}$. $\diamondsuit$

Klarerweise gilt: **Satz 5.4.2:** *Die Summe und das Produkt beschränkter Funktionen sind wieder beschränkte Funktionen.*

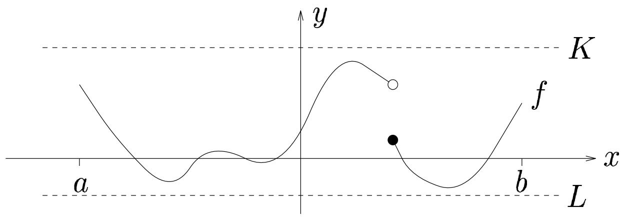

Abbildung 5.5: Skizze $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$

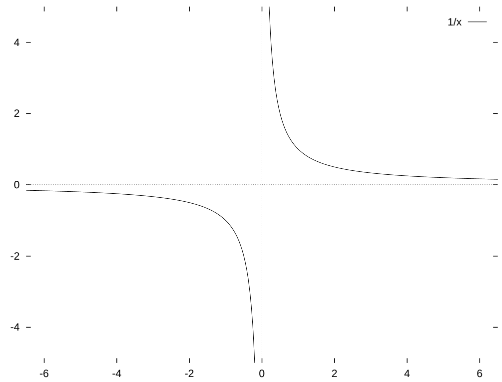

Abbildung 5.6: $f(x) = \frac{1}{x}$

Stetigkeit

Der Begriff der Stetigkeit ist von fundamentaler Bedeutung in der Theorie von Funktionen. Grob gesprochen handelt es sich um die folgende Frage:

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ offen, z.B. $A = (a,b)$ und $f : A \to \mathbb{R}$. Für zwei Argumente ξ und $\xi + h$ in A sind die Funktionswerte $f(\xi)$ und $f(\xi + h)$. Kann man $f(\xi + h)$ beliebig nahe an $f(\xi)$ heranbringen, indem man h klein genug wählt ? Anders ausgerückt: Haben Argumente, die nahe liegen, Bilder, die nahe liegen ?

Definition 5.4.4: *(*Limesdefinition *der Stetigkeit)*

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ offen. Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt stetig an der Stelle $\xi \in A$, *wenn für jede konvergente Folge $x_n \subset A$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\xi) \ .$$

Aquivalent dazu ist

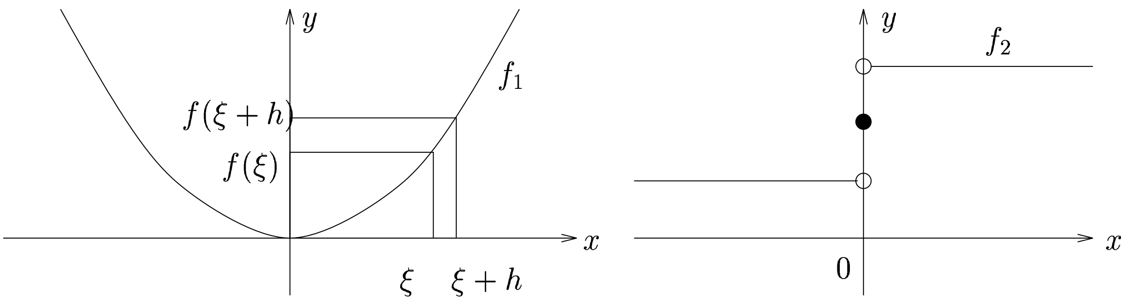

Abbildung 5.7: f_1 ist stetig für alle ξ; f_2 ist nicht stetig bei $\xi = 0$

Definition 5.4.5: (ε, δ - Definition der Stetigkeit)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ offen. Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt stetig an der Stelle $\xi \in A$, *wenn es zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ eine reellen Zahl $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gibt, so daß für alle x mit $|\xi - x| < \delta$ gilt*

$$|f(\xi) - f(x)| < \varepsilon \ .$$

Da A als offen voausgesetzt wurde, gilt für δ hinreichend klein $K(\xi, \delta) \subset A$. Daher ist $f(x)$ für $x \in K(\xi, \delta)$ definiert.

Beweis: (der Äquivalenz)

1. ε-δ $\Rightarrow$ Limes: Es sei $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \ \exists N = N(\varepsilon) : \ |x_n - \xi| < \delta(\varepsilon)$ für $n \geq N \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \ \exists N = N(\varepsilon)$: $|f(\xi) - f(x_n)| < \varepsilon$, $\forall n \geq N \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\xi)$.
2. Limes $\Rightarrow$ ε-δ: Wir zeigen: Gilt die ε, δ - Eigenschaft nicht, so gilt auch die Limeseigenschaft nicht. In diesem Fall $\exists \varepsilon_0 > 0$, so daß $\forall \delta > 0 \, \exists x$ (abhängig von δ) mit $|\xi - x| < \delta$ und $|f(x) - f(\xi)| \geq \varepsilon_0$. Es sei δ_0 fest gewählt: $\exists x_0$ mit $|\xi - x_0| < \delta_0$, $|f(\xi) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$; Natürlich ist $x_0 \neq \xi$. Wähle $\delta_1 = \frac{1}{2}|\xi - x_0|$: $\exists x_1$ mit $|\xi - x_1| < \delta_1$, $|f(\xi) - f(x_1)| \geq \varepsilon_0$; Wiederum ist $x_1 \neq \xi$. Wähle $\delta_2 = \frac{1}{2}|\xi - x_2|$: $\exists x_2$ mit $|\xi - x_2| < \delta_2$, u.s.w..
   Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$, jedoch $|f(\xi) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0$, $n \in \mathbb{N}$. Also konvergiert $f(x_n)$ nicht gegen $f(\xi)$. Wenn also die ε, δ - Eigenschaft nicht gilt, gilt auch die Limeseigenschaft nicht.

qed.

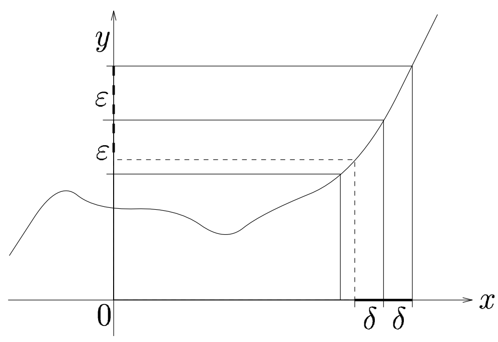

Abbildung 5.8: ε, δ - Definition der Stetigkeit

Merkregel: Ist f stetig an der Stelle ξ so ist die Reihenfolge von Limesbildung und Funktionsauswertung vertauschbar: Für jede Folge $\{x_n\} \in A$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\xi) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

Definition 5.4.6: *f: $(a,b) \to \mathbb{R}$ heißt* stetig auf (a,b), *wenn f stetig an jeder Stelle $x \in (a,b)$ ist. Wir schreiben dafür $f \in C(a,b)$.*

Satz von der Vorzeichenbeständigkeit stetiger Funktionen

Satz 5.4.3: *Ist die Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ an der Stelle $\xi \in A$ stetig und $f(\xi) \neq 0$, so gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in K(\xi,\delta)$ gilt: $f(x) \neq 0$ und* $\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} f(\xi)$.

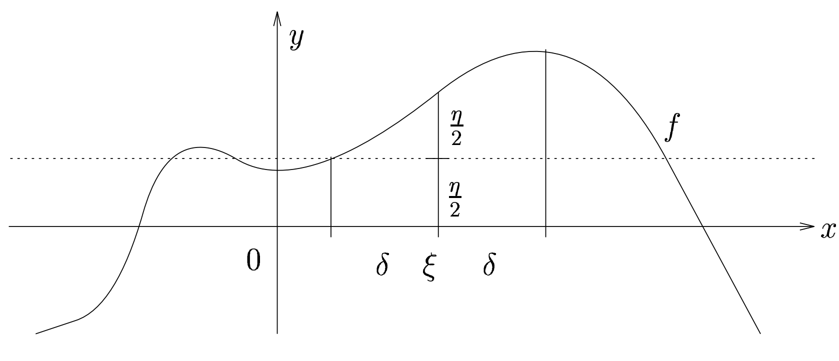

Abbildung 5.9: Vorzeichenbeständigkeit stetiger Funktionen

Beweis: Sei $f(\xi) = \eta > 0$. Gemäß der ε, δ - Definition der Stetigkeit existiert für $\varepsilon = \frac{\eta}{2}$ ein $\delta = \delta(\frac{\eta}{2}) > 0$, so daß für alle $|x-\xi| < \delta$ gilt $|f(x) - f(\xi)| < \frac{\eta}{2}$. Für diese x muß $f(x) \neq 0$ sein, da sonst $|f(x) - f(\xi)| = |f(\xi)| = \eta > \frac{\eta}{2}$. Weiters muß $\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} f(\xi)$ sein, da sonst $|f(x) - f(\xi)| = |f(x)| + |f(\xi)| > \eta > \frac{\eta}{2}$. qed.

Satz 5.4.4: *Sind die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ an der Stelle ξ stetig, so sind auch die folgenden Funktionen an der Stelle ξ stetig.*

1. $af(x) + bg(x),\ a, b \in \mathbb{R}$
2. $f(x)g(x)$,
3. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *falls* $g(\xi) \neq 0$.

Beweis:

1. Sei $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$. Dann gilt laut Voraussetzung $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\xi)$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(\xi)$. Aus den Grenzwertsätzen für Folgen reeller Zahlen folgt
$$\lim_{n\to\infty}(af(x_n) + bg(x_n)) = a \lim_{n\to\infty} f(x_n) + b \lim_{n\to\infty} g(x_n) = af(\xi) + bg(\xi).$$
2. und (3) analog.

qed.

Beispiel: Ein Polynom $p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Beweis: Rekursives Anwenden von Satz 5.4.4 impliziert: Die Potenzfunktionen $(f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2, \cdots,\ f_i(x) = x^i,\ i \in \mathbb{N}_0$ sind stetig. Daraus folgt $p(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^i$ ist stetig. ◊

Um nicht immer auf die Definition über Folgen zurückgreifen zu müssen, definieren wir den Begriff des Grenzwertes einer Funktion und links- und rechtseitigen Grenzwert einer Funktion (siehe Abb. 5.10).

Definition 5.4.7: *Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat an der Stelle ξ den*

1. Grenzwert α, *in Zeichen*
$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \alpha,$$
falls f zumindest in einer reduzierten Umgebung $K_r(\xi, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ definiert ist und für jede gegen ξ konvergente Folge $\{x_n\} \subset K_r(\xi, \varepsilon)$ gilt
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha\ .$$

2. *den* linksseitigen Grenzwert α_l*, in Zeichen*

$$\lim_{x \to \xi-} f(x) = \alpha_l,$$

falls f zumindest in einem Intervall $I = (\xi - \varepsilon, \xi)$, $\varepsilon > 0$ definiert ist und für jede gegen ξ konvergente Folge $\{x_n\} \subset I$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha_l \ .$$

3. *den* rechtsseitigen Grenzwert α_r*, in Zeichen*

$$\lim_{x \to \xi+} f(x) = \alpha_r,$$

falls f zumindest in einem Intervall $I = (\xi, \xi + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ definiert ist und für jede gegen ξ konvergente Folge $\{x_n\} \subset I$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha_r \ .$$

Wir schreiben: $\alpha_l = f(\xi-)$, $\alpha_r = f(\xi+)$.

Bemerkung:

1. Man beachte, daß in der obigen Definition die Funktion f an der Stelle ξ gar nicht definiert sein muß.

2. Natürlich kann man den Begriff des (einseitigen) Grenzwerts einer Funktion auch mittels ε, δ–Notation charakterisieren.

♠

Analog dazu definiert man die Begriffe:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) \ .$$

Die obigen Begriffsbildungen ermöglichen die folgende Charakterisierung der Stetigkeit einer Funktion.

Satz 5.4.5: *Die Funktion $f(x)$ ist genau dann stetig an der Stelle ξ, wenn $f(\xi-)$ und $f(\xi+)$ existieren und $f(\xi-) = f(\xi+) = f(\xi)$ gilt.*

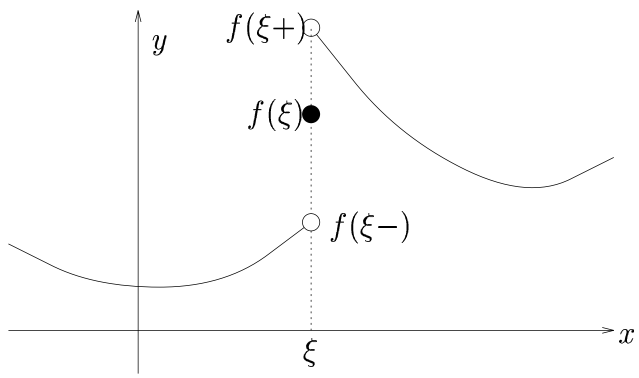

Abbildung 5.10: Rechts- und linksseitiger Grenzwert

Einfache Arten von Unstetigkeiten

Definition 5.4.8: *Falls für eine Funktion f die einseitigen Grenzwerte $f(\xi-)$, $f(\xi+)$ existieren und $f(\xi-) = f(\xi+) \neq f(\xi)$ gilt, so spricht man von einer* hebbaren Unstetigkeit.

Falls für eine Funktion f die einseitigen Grenzwerte $f(\xi-)$, $f(\xi+)$ existieren und $f(\xi-) \neq f(\xi+)$ gilt, so spricht man von einer Sprungstelle *mit* Sprunghöhe $|f(\xi+) - f(\xi-)|$.

Beispiel: $f(x) = \operatorname{sign}^2 x$. Die Unstetigkeit kann durch die Definition $f(0) := 1$

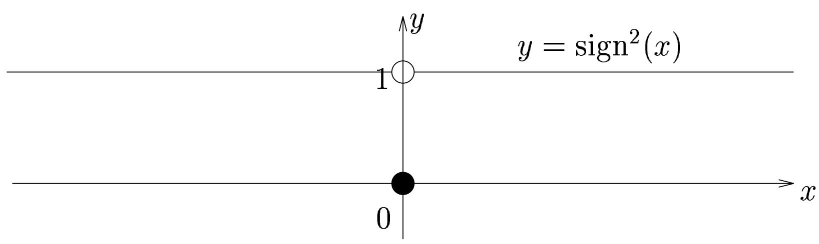

Abbildung 5.11: Hebbare Unstetigkeit

behoben werden. Dadurch definiert man strenggenommen eine neue Funktion, die stetig ist und die für $x \neq 0$ mit der alten Funktion übereinstimmt. $\diamondsuit$

Beispiel: Für $f(x) = \operatorname{sign} x$ ist der Punkt $x = 0$ eine Sprungstelle mit Sprunghöhe 2. $\diamondsuit$

Definition 5.4.9: *Die Funktion $f(x)$ hat an der Stelle ξ einen* Pol der Ordnung α, *wenn f geschrieben werden kann als $f(x) = \frac{g(x)}{(x-\xi)^\alpha}$, $\alpha > 0$, wobei g an der*

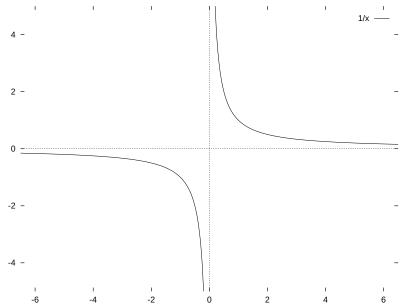

Abbildung 5.12: Pol erster Ordnung

Stelle ξ stetig ist und $g(\xi) \neq 0$.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 1$, $\xi = 0$, $\alpha = 1$, Pol 1. Ordnung. ♢

Beispiel: $f(x) = \frac{3x}{(x-6)^3}$ hat an der Stelle $x = 6$ einen Pol 3.Ordnung. ♢

Bemerkung: Je höher die Ordnung eines Pols, desto schneller „divergiert" $f(x_n)$ für $x_n \to \xi$ gegen $\pm\infty$. ♠

Ein Beispiel einer „pathologischen" Unstetigkeit

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{array}{rcrlcll} f(x) & = & 0 & \text{für } \frac{1}{x} & = & n\pi, & x = \frac{1}{n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ f(x) & = & 1 & \text{für } \frac{1}{x} & = & \frac{\pi}{2} + 2n\pi, & x = \frac{1}{\pi\left(\frac{1}{2}+2n\right)}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ f(x) & = & -1 & \text{für } \frac{1}{x} & = & \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, & x = \frac{1}{\pi\left(\frac{3}{2}+2n\right)}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{array}$$

Für $\{x_n\} = \{\frac{1}{n\pi}\}$ gilt $f(x_n) = 0$. Für $\{x_n'\} = \left\{\frac{1}{\pi(\frac{1}{2}+2n)}\right\}$ gilt $f(x_n') = 1$. Für $\{x_n''\} = \left\{\frac{1}{\pi(\frac{3}{2}+2n)}\right\}$ gilt $f(x_n'') = -1$. Generell: $\forall\alpha \in [-1, 1]\, \exists\{x_n\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ und $f(x_n) = \alpha$.

Es gilt jedoch: Für $\alpha > 0$ ist die Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

stetig auf $[0, \infty)$, mit $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0$.

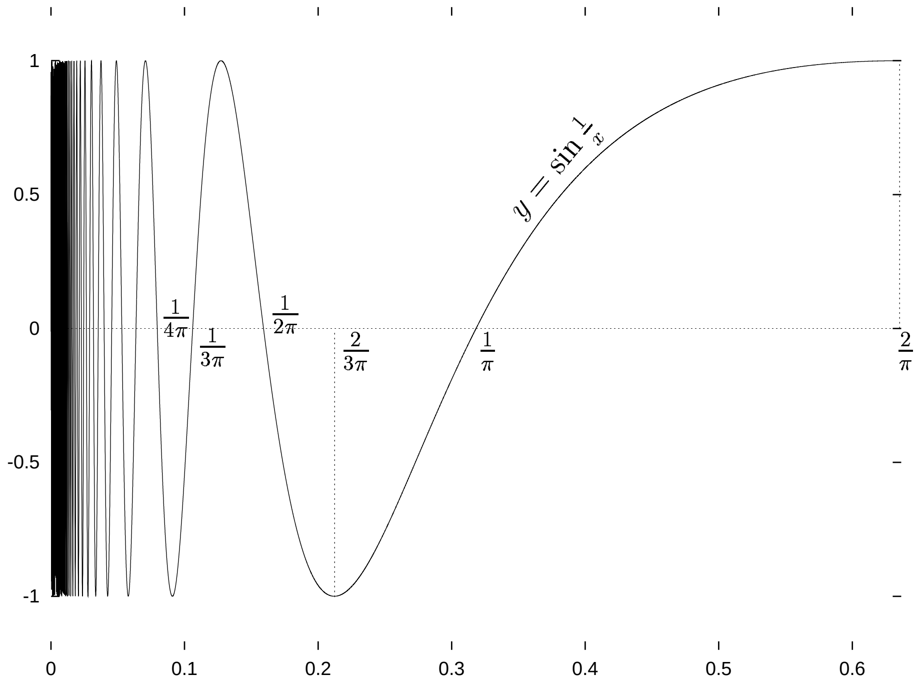

Abbildung 5.13: $f(x) = \sin\frac{1}{x}$

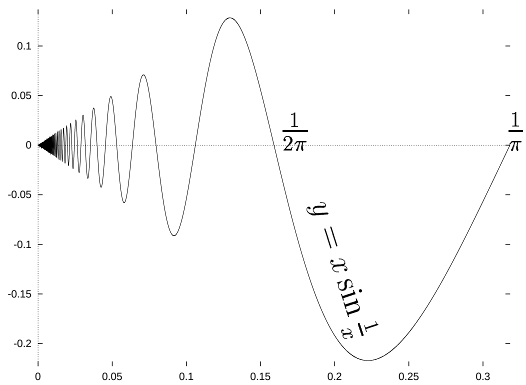

Abbildung 5.14: $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$

Stetigkeit der Komposition von Funktionen

Satz 5.4.6: *Die Komposition $f \circ g$ sei definiert. Falls g an der Stelle ξ stetig ist und f an der Stelle $g(\xi)$ stetig ist, dann ist $y = f(g(x))$ an der Stelle ξ ebenfalls stetig.*

Beweis: Zu zeigen ist: Aus $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} f(g(x_n)) = f(g(\xi))$.
Laut Voraussetzung gilt

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(\xi)$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = g(\xi) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = f(g(\xi))$.

Setzt man in (2) $z_n = g(x_n)$, so ist der Beweis erbracht. qed.

Stetigkeit auf abgeschlossenen Intervallen

Definition 5.4.10: $f\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}$ *heißt* stetig auf $[a,b]$, *wenn f auf (a,b) stetig ist, die rechts- bzw. linksseitigen Grenzwerte $f(a+)$ und $f(b-)$ existieren und weiters gilt $f(a) = f(a+)$, $f(b) = f(b-)$.*

Notation: $f \in C[a,b]$.

Beispiel: $f(x) = x^3$, $I = [1,2]$; $f(1+) = 1 = f(1)$, $f(2-) = 8 = f(2)$; f ist stetig auf I. ♢

Beispiel: $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 1 \\ x^3, & x \in (1,2] \end{cases}$, $\quad f \notin C[a,b]$. ♢

Satz 5.4.7: *Eine auf einem abgeschlossenen Intervall $I = [a,b]$ stetige Funktion ist dort beschränkt, d.h. es existieren Zahlen L, K, so daß $L \le f(x) \le K$, $\forall x \in [a,b]$.*

Beweis: (indirekt) Annahme: $f(x)$ ist nicht beschränkt. Dann existiert eine Folge $\{x_n\} \subseteq [a,b]$ mit $|f(x_n)|$ nicht beschränkt. Daraus folgt: Es existiert eine Teilfolge $\{x_n'\}$ mit $\{|f(x_n')|\}$ uneigentlich konvergent gegen ∞. $\{x_n'\}$ hat mindestens einen Häufungspunkt $\xi \in [a,b]$, und eine gegen ξ konvergente Teilfolge $\{x_n''\}$. Aufgrund der Stetigkeit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'') = f(\xi)$, andererseits jedoch $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n'')| = \infty$, ein Widerspruch. qed.

Wegen dieses Satzes ist die Menge $f(I)$ nach oben und nach unten beschränkt, hat also ein *Supremum* s und ein *Infimum* r. Wir schreiben dafür

$$r = \inf_{x\in I} f(x), \qquad s = \sup_{x\in I} f(x)\ .$$

Im Fall $r, s \in f(I)$, d.h. wenn $\exists\, \xi,\, \eta \in I$ mit $f(\xi) = r$ und $f(\eta) = s$, dann nennt man r das *Minimum* und s das *Maximum* von f auf I. Wir schreiben dann

$$r = \min_{x \in I} f(x), \qquad s = \max_{x \in I} f(x)\ .$$

Satz 5.4.8: *(von Weierstraß über Minimum und Maximum von stetigen Funktionen) Auf einem abgeschlossenen Intervall nimmt eine stetige Funktion stets ihr Minimum und Maximum an.*

Beweis: Es sei s das oben definierte Supremum. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es dann ein $x_n \in [a, b]$ mit $s - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq s$. Die Folge $\{x_n\}$ besitzt eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ und es sei $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = \eta$. Wegen der Stetigkeit von f gilt $f(\eta) = \lim\limits_{k \to \infty} f(x_{n_k})$. Nun ist aber

$$s - f(x_{n_k}) < \frac{1}{n_k} \leq \frac{1}{k}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

woraus folgt

$$0 = \lim_{k \to \infty} (s - f(x_{n_k})) = s - f(\eta).$$

Das Supremum ist also tatsächlich ein Maximum.
Zum Beweis für das Minimum wendet man die obige Überlegung auf die Funktion $-f(x)$ an. qed.

Satz 5.4.9: *(Zwischenwertsatz von Bolzano) Eine auf einem abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$ stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ nimmt jeden Zwischenwert (mindestens) einmal an, d.h.*

$$\forall \eta \in [\min_{x \in I} f(x), \max_{x \in I} f(x)]\ \exists \xi \in I \textit{ mit } f(\xi) = \eta.$$

Beweis: Man geht von der Gleichung $f(x) = \eta$ aus und erzeugt durch sukzessive Intervallhalbierung eine Intervallschachtelung

$$[c_n, d_n], \quad n \in \mathbb{N}$$

mit der Eigenschaft

$$f(c_n) \leq \eta \leq f(d_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

Für die durch die Intervallschachtelung definierte Zahl $\xi = \lim\limits_{n \to \infty} c_n = \lim\limits_{n \to \infty} d_n$ folgt $f(\xi) \leq \eta$ und $\eta \leq f(\xi)$, also

$$\eta = f(\xi).$$

qed.

Aus diesen Sätzen folgt unmittelbar:

Satz 5.4.10:

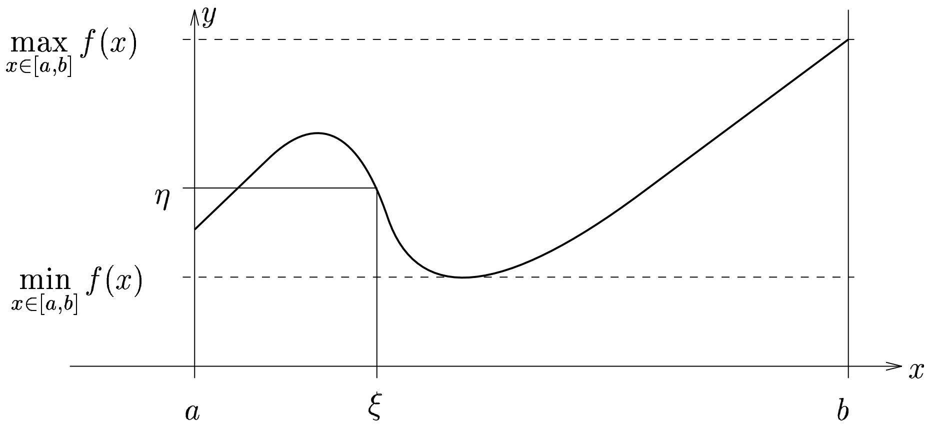

Abbildung 5.15: Zwischenwertsatz

1. *Ist f auf dem Intervall I stetig, so ist das Bild $f(I)$ wieder ein Intervall.*
2. *Durch eine stetige Abbildung f wird ein abgeschlossenes Intervall $[a,b]$ auf ein abgeschlossenes Intervall abgebildet.*

Gleichmäßige Stetigkeit

Definition 5.4.11: *Eine Funktion $f(x)$ heißt* gleichmäßig stetig *auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein δ existiert, so daß aus $|x_1 - x_2| < \delta$ folgt $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.*

Satz 5.4.11: *Jede auf einem* abgeschlossenen *Intervall I stetige Funktion ist dort gleichmäßig stetig.*

Beweis: Wir setzen für $n \in \mathbb{N}$

$$s_n := \{\sup |f(x) - f(y)| : x, y \in I \text{ mit } |x - y| \leq \frac{1}{n}\}.$$

1. Wenn wir zeigen können, daß $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$, so sind wir fertig: Um für gegebenes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ zu finden, wählen wir dann $N = N(\varepsilon)$ so groß, daß $s_{N(\varepsilon)} < \varepsilon$ und setzen $\delta := \frac{1}{N(\varepsilon)}$.
2. Die Folge $\{s_n\}$ ist monoton fallend und nach unten beschränkt durch null. $\{s_n\}$ ist also sicher konvergent. Wir zeigen jetzt, daß eine Teilfolge $\{s_{n_k}\}$, $k \in \mathbb{N}$ gegen null konvergiert, und haben dann natürlich auch die Konvergenz der Folge selbst gezeigt.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es Zahlen $x_n, y_n \in I$ mit

$$s_n - \frac{1}{n} < |f(x_n) - f(y_n)| \leq s_n. \tag{5.1}$$

Die Folge $\{x_n\}$ hat eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$ und wegen

$$|x_{n_k} - y_{n_k}| \leq \frac{1}{n_k} \leq \frac{1}{k} \to 0, \quad \text{für} \quad k \to \infty,$$

gilt auch $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = \xi$. Wegen der Stetigkeit von f ist $\lim\limits_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = 0$, und daher nach (5.1)

$$\lim_{k\to\infty} s_{n_k} = \lim_{k\to\infty} (s_{n_k} - \frac{1}{n_k}) = 0.$$

qed.

Lipschitz Stetigkeit

Definition 5.4.12: *Eine Funktion $f(x)$ heißt* Lipschitz-stetig *auf dem Intervall I, wenn es eine Konstante $L \geq 0$ gibt, so daß*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in I.$$

So eine Konstante L heißt Lipschitzkonstante von f auf I.

Satz 5.4.12: *Lipschitzstetigkeit impliziert gleichmäßige Stetigkeit.*

Beweis: $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Behauptung: $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. Denn aus $|x_1 - x_2| < \delta$ folgt $|f(x_1) - f(x_2)| < L\frac{\varepsilon}{L}$, d.h.: $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. qed.

Beispiel: $f(x) = x^2$, $I = [a, b]$,

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |x_1^2 - x_2^2| \\ &= |x_1 + x_2||x_1 - x_2| \\ &= 2\max\{|a|, |b|\}.|x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

Eine Lipschitzkonstante für $f(x) = x^2$ auf $[a, b]$ ist daher $2\max\{|a|, |b|\}$. $\diamondsuit$

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in [a, \infty)$ mit $a > 0$. Es gilt

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1^2 x_2^2}(x_2 - x_1)$$

und folglich

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|,$$

mit

$$L \geq \sup_{x_1, x_2 \in [a,\infty)} \frac{x_1 + x_2}{x_1^2 x_2^2}.$$

Man sieht, daß

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{x_1}{x_1^2 x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{1}{x_1 x_2^2} + \frac{1}{x_1^2 x_2} \leq \frac{2}{a^3}\,.$$

Somit ist $L = \frac{2}{a^3}$ eine Lipschitzkonstante. ♢

Monotonie

Definition 5.4.13: *$f(x)$ heißt auf dem Intervall I*

monoton wachsend *im strengen Sinn, wenn $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,*
monoton wachsend im schwachen Sinn*, wenn $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$,*
monoton fallend *im strengen Sinn, wenn $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,*
monoton fallend im schwachen Sinn*, wenn $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.*

Satz 5.4.13: *Eine auf einem Intervall I stetige und streng monotone Funktion nimmt jeden Wert in $f(I)$ genau einmal an.*

Beweis: Wäre für $\xi_1, \xi_2 \in f(I)$ mit $\xi_1 < \xi_2$, $f(\xi_1) = f(\xi_2)$, so läge ein Widerspruch zur strengen Monotonie vor. qed.

Stetigkeit der Umkehrfunktion

Satz 5.4.14: *Ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton, so existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to I$ und ist ebenfalls stetig und streng monoton.*

Beweis: Die Existenz der Umkehrfunktion folgt sofort aus der Monotonie.

1. Strenge Monotonie von f^{-1}: Wir nehmen an, f sei streng monoton wachsend. Wäre für $y_1 < y_2$ die Ungleichung $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$ möglich, so hieße das, mit $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$, daß $f(x_1) < f(x_2)$ bei $x_1 \geq x_2$, ein Widerspruch.

2. Stetigkeit von f^{-1}: Wir werden zeigen: Sei $\eta = f(\xi) \in f(I)$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß aus $|y - \eta| < \delta$ folgt $|f^{-1}(y) - \xi| < \varepsilon$. Falls ξ kein Randpunkt von I ist, wählen wir $\varepsilon > 0$ so klein, daß $[\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon] \subseteq I$ ist. Weiters setzen wir $\eta_1 = f(\xi - \varepsilon)$, $\eta_2 = f(\xi + \varepsilon)$ und $\delta := \min\{\eta - \eta_1, \eta_2 - \eta\}$. Dann folgt aus $|y - \eta| < \delta$

$$\eta_1 \leq \eta - \delta < y < \eta + \delta \leq \eta_2.$$

Aus der Monotonie von f^{-1} ergibt sich

$$\xi - \varepsilon = f^{-1}(\eta_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(\eta_2) = \xi + \varepsilon,$$

somit

$$|f^{-1}(y) - \xi| < \varepsilon.$$

Ist ξ ein Randpunkt, so geht man analog vor.

qed.

Beispiel: $f(x) = x^n$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. n ungerade: f stetig, streng monoton wachsend; $y = x^n \Leftrightarrow x = y^{\frac{1}{n}}$, d.h.: $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$.

2. n gerade: f stetig und streng monoton fallend auf $(-\infty, 0]$, f stetig und streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$.

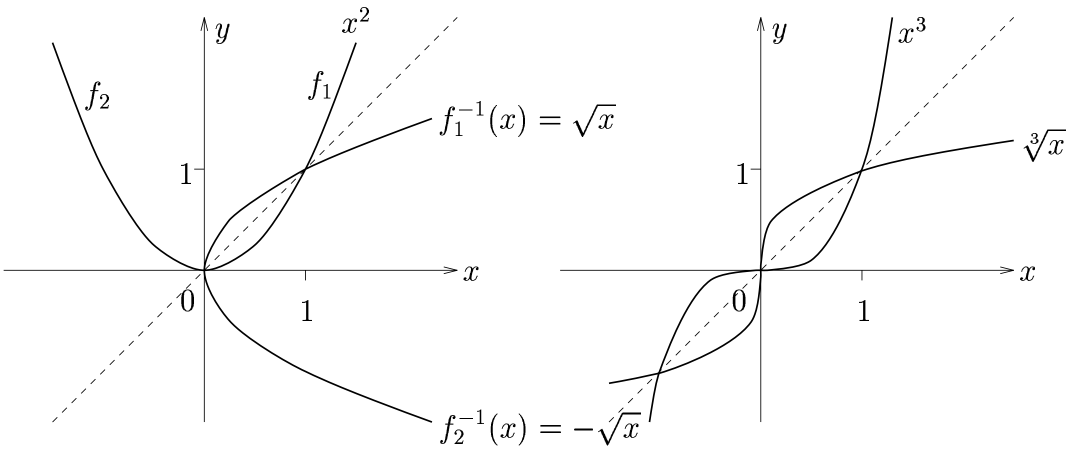

Abbildung 5.16: Umkehrfunktionen für $f(x) = x^n$, $n = 2$ und $n = 3$

Daher sind die Funktionen

$$\begin{array}{ll} f_1 : [0,\infty) \to [0,\infty), & f_1(x) = x^n \\ f_2 : (-\infty,0] \to [0,\infty), & f_2(x) = x^n \end{array}$$

stetig und streng monoton und haben die Umkehrfunktionen:

$$\begin{array}{ll} f_1^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty), & f_1^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, \\ f_2^{-1} : [0,\infty) \to (-\infty,0], & f_2^{-1}(x) = -\sqrt[n]{x}. \end{array}$$

$\diamondsuit$

Weitere Eigenschaften von Funktionen

Definition 5.4.14: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *heißt* periodisch mit der Periode $p > 0$, *wenn* p *die kleinste reelle Zahl ist, so daß,* $f(x+p) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Dann gilt: $f(x + kp) = f(x)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Definition 5.4.15: $f : (-a,a) \to \mathbb{R}$, $a > 0$, *heißt* gerade, *wenn* $f(x) = f(-x)$, $x \in (-a,a)$, *und* ungerade, *wenn* $f(x) = -f(-x)$, $x \in (-a,a)$. *(Analog für* $[-a,a]$*).*

Der Graph einer geraden Funktion ist symmetrisch zur y-Achse, der einer ungeraden Funktion symmetrisch zum Ursprung.

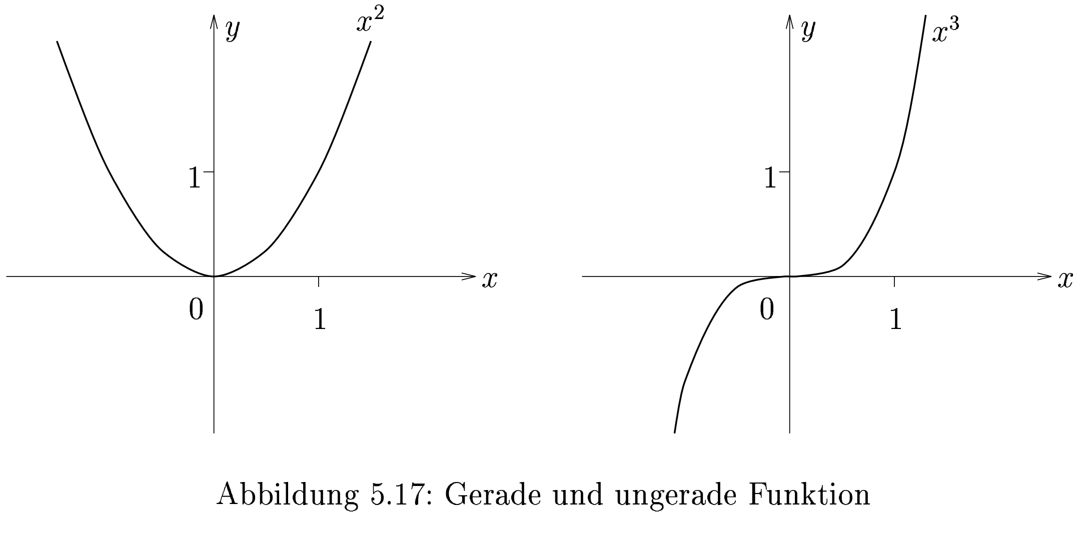

Abbildung 5.17: Gerade und ungerade Funktion

Kapitel 6

Differentialrechnung

6.1 Differenzenquotient und Ableitung

Gegeben ist eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Fragestellung: Welche Richtung hat die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x, f(x))$? Was versteht man überhaupt unter der Tangente? Besitzt jede Kurve eine Tangente?

Idee: Approximation der Tangente durch Sekanten. Die Steigung der Sekante ist

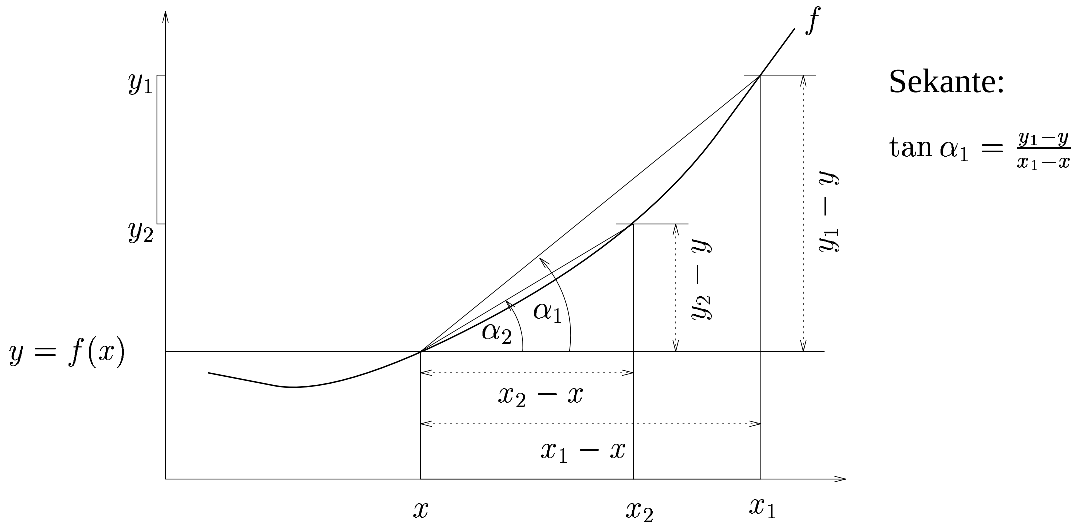

Abbildung 6.1: Differenzenquotient

gleich dem *Differenzenquotienten*

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Man erwartet, daß die Sekante im Grenzübergang $h \to 0$ zur Tangente wird. Der Anstieg der Tangente ist die Ableitung der Funktion.

Bemerkung: Zur Definition der Ableitung an der Stelle x muß f in einer Umgebung von x definiert sein. ♠

Definition 6.1.1: *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ und $x \in (a, b)$. Wenn $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ existiert, dann heißt f differenzierbar an der Stelle x. Man schreibt*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

und bezeichnet $f'(x)$ als die 1. Ableitung *von f an der Stelle x.*

Andere übliche Bezeichnungen für die Ableitung sind:

$$\frac{dy}{dx}(x) = y'(x) = \frac{df}{dx}(x) = f'(x)$$

Beispiel: $f(x) = c$, $f(x+h) - f(x) = c - c = 0$, daraus folgt: $c' = 0$, $\frac{dc}{dx} = 0$. Die Ableitung einer Konstanten ist Null. ♢

Beispiel: $f(x) = x$, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = 1$, d.h.: $\frac{dx}{dx} = 1$. ♢

Die Ableitung von x^n

Es sei $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Aus

$$\begin{aligned} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \frac{1}{h}\Big[\binom{n}{0} x^n h^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^n - x^n\Big] \\ &= n x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \cdots + \binom{n}{n} h^{n-1}. \end{aligned}$$

und $h \to 0$ folgt

Satz 6.1.1: *Die Potenzfunktion x^n, $n \in \mathbb{N}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und*

$$(x^n)' = n x^{n-1} \ .$$

Die Ableitung von $\sin x$ und $\cos x$

Es sei $f(x) = \sin x$. Aus

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{1}{h}[\sin(x+h) - \sin x] \\ &= \frac{1}{h} 2\cos\Big(x+\frac{h}{2}\Big)\sin\frac{h}{2} \\ &= \cos\Big(x+\frac{h}{2}\Big)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.\end{aligned}$$

und

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

folgt

$$f'(x) = \frac{d\sin x}{dx} = \lim_{h\to 0}\cos\Big(x+\frac{h}{2}\Big)\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x\ .$$

Analog zeigt man die Differenzierbarkeit von $\cos x$. Daher gilt

Satz 6.1.2: *Die Winkelfunktionen* $\sin x$ *und* $\cos x$ *sind auf ganz* $\mathbb{R}$ *differenzierbar und*

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x, \qquad \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x\ .$$

Wir beweisen noch das verwendete Resultat

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Beweis: Wegen der zwei Ungleichungen für die trigonometrischen Funktionen gilt

$$\frac{\sin x}{\tan x} \le \frac{\sin x}{x} \le 1,$$

also

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1, \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Das Resultat folgt wegen $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.

Ableitung der Exponentialfunktion

Dazu benötigen wir zwei Hilfssätze:

Hilfssatz 1:

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e.$$

Beweis: Für $h_k = \frac{1}{k}$ kennen wir das Resultat bereits. Es sei nun $\{h_k\}$ eine beliebige positive Nullfolge, d.h.: $h_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{h\to\infty} h_k = 0$. $\forall k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n_k \in \mathbb{N}$, so daß $\frac{1}{n_k+1} < h_k < \frac{1}{n_k}$, wobei natürlich $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = \infty$. Aus den Ungleichungen folgt

$$\Big(1+\frac{1}{n_k+1}\Big)^{n_k} < (1+h_k)^{\frac{1}{h_k}} < \Big(1+\frac{1}{n_k}\Big)^{n_k+1},$$

weiters

$$\frac{1}{\Big(1+\frac{1}{n_k+1}\Big)}\Big(1+\frac{1}{n_k+1}\Big)^{n_k+1} < (1+h_k)^{\frac{1}{h_k}} < \Big(1+\frac{1}{n_k}\Big)^{n_k}\Big(1+\frac{1}{n_k}\Big).$$

Das Vergleichskriterium liefert daher

$$\lim_{k\to\infty}(1+h_k)^{\frac{1}{h_k}} = \lim_{h\to 0+}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e.$$

Für $h < 0$ verwendet man

$$(1+h)^{\frac{1}{h}} = \Big(1-\frac{h}{1+h}\Big)^{-\frac{1}{h}} = \Big(1-\frac{h}{1+h}\Big)^{-\frac{1+h}{h}}\Big(1-\frac{h}{1+h}\Big)$$

und die Substitution $h' = -\frac{h}{1+h}$ um den linksseitigen Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0-}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ auf den rechtsseitigen Grenzwert zurückzuführen. qed.

Hilfssatz 2:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \ln a.$$

Beweis: Wir setzen $h := a^{\Delta x} - 1$, d.h.: $\Delta x = \log_a(1+h)$, wobei natürlich $\Delta x \to 0 \Leftrightarrow h \to 0$. Dann folgt

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{\log_a(1+h)}.$$

Nun gilt wegen der Stetigkeit von $\log_a x$,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(1+h)}{h} &= \lim_{h\to 0}\log_a(1+h)^{\frac{1}{h}}\\ &= \log_a \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\\ &= \log_a e \;=\; \frac{1}{\ln a}.\end{aligned}$$

qed.

Satz 6.1.3: *Die Exponentialfunktion a^x ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und ihre Ableitung ist*

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \ln a.$$

Beweis: Aus Hilfsatz 2 folgt

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} a^x\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x \ln a\ .$$

qed.

Links- bzw. rechtsseitige Ableitung

Definition 6.1.2: *Eine Funktion, für die der Grenzwert*

$$\lim_{\xi\to x-}\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x} = \lim_{h\to 0-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'_-(x)$$

existiert, heißt linksseitig differenzierbar an der Stelle x und der Grenzwert wird als die linksseitige Ableitung *von f an der Stelle x bezeichnet. Die* rechtsseitige Ableitung *wird analog definiert:*

$$\lim_{\xi\to x+}\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x} = \lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'_+(x).$$

Satz 6.1.4: *Die Funktion f ist genau dann differenzierbar, wenn die beiden einseitigen Ableitungen existieren und gleich sind.*

Definition 6.1.3: *Die Funktion f besitzt an der Stelle x einen* Eckpunkt, *wenn an der Stelle x die beiden einseitigen Ableitungen existieren und verschieden sind.*

Beispiel: Für $f(x) = |x|$ gilt

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h| - 0}{h} = \operatorname{sign} h.$$

Da der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} \operatorname{sign} h$ nicht existiert ist f ist an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar. Wegen $\lim\limits_{h\to 0-} \operatorname{sign} h = f'_-(0) = -1$ und $\lim\limits_{h\to 0+} \operatorname{sign} h = f'_+(0) = 1.$ ist $x = 0$ ein Eckpunkt.

$\diamondsuit$

Beispiel: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ist an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = \lim_{h\to 0} h^{-\frac{2}{3}} = \infty \ .$$

$\diamondsuit$

Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Satz 6.1.5: *Ist eine Funktion an der Stelle x differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.*

Beweis: Aus $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$ folgt $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$. qed.

Bemerkung: Wie man am Beispiel $f(x) = |x|$ an der Stelle $x = 0$ sieht, ist die Umkehrung des obigen Satzes falsch! $\spadesuit$

6.2 Regeln der Differentialrechnung

Differentiation von Summen, Produkten und Quotienten

Satz 6.2.6: *Die Funktionen $u(x), v(x)$ seien differenzierbar. Dann sind die Summe $u(x) + v(x)$ und das Produkt $u(x)v(x)$ differenzierbar, und es gilt*

$$(u+v)' = u' + v' \ ,$$

$$(uv)' = u'v + uv' \ .$$

Im Fall $v(x) \neq 0$ ist auch der Quotient $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ differenzierbar, es gilt

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \ .$$

Beweis:

Für die Summe $y(x) = u(x) + v(x)$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{y(x+h)-y(x)}{h} &= \frac{u(x+h)+v(x+h)-u(x)-v(x)}{h}\\ &= \frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\frac{v(x+h)-v(x)}{h}.\end{aligned}$$

Für $h \to 0$ folgt dann die Behauptung.

Für das Produkt $y(x) = u(x)v(x)$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{y(x+h)-y(x)}{h} &= \frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}\\ &= \frac{u(x+h)-u(x)}{h}v(x+h)+u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}.\end{aligned}$$

Für $h \to 0$ folgt dann wieder die Behauptung.

Für den Quotienten $y(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ gilt im Fall $v(x) \neq 0$

$$\begin{aligned}\frac{y(x+h)-y(x)}{h} &= \frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}\\ &= \frac{(u(x+h)-u(x))v(x)-u(x)(v(x+h)-v(x)}{hv(x+h)v(x)},\end{aligned}$$

woraus für $h \to 0$ die Behauptung folgt. qed.

Beispiel: Insbesondere gilt: $(cf)' = cf'$. ♢

Beispiel: $y(x) = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. Aus

$$\left(e^x\right)' = e^x$$

und

$$\left(e^{-x}\right)' = \left((\frac{1}{e})^x\right)' = \left(\frac{1}{e}\right)^x \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -e^{-x}$$

folgt

$$(\sinh x)' = \frac{1}{2}\Big(e^x - (-e^{-x})\Big) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x\ .$$

Zusammenfassend gilt:

$$\begin{aligned}\frac{d\sinh x}{dx} &= \cosh x, \quad x \in \mathbb{R}\\ \frac{d\cosh x}{dx} &= \sinh x, \quad x \in \mathbb{R}\ .\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Beispiel: Aus der Quotientenregel folgt auf dem jeweiligen Definitionsbereich

$$
\begin{aligned}
(\tan x)' &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} &= \frac{1}{\cos^2 x}, \\
(\cot x)' &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} &= -\frac{1}{\sin^2 x}.
\end{aligned}
$$

$\diamondsuit$

Differentiation einer zusammengestzten Funktion

Hier gilt die sogenannte *Kettenregel*:

Satz 6.2.7: *Unter den Voraussetzungen*

1. *die Zusammensetzung $(f \circ g)(x)$ ist definiert,*
2. *die Funktion g ist an der Stelle x differenzierbar,*
3. *die Funktion f ist an der Stelle $g(x)$ differenzierbar,*

ist die Funktion $f \circ g$ an der Stelle x differenzierbar und

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Beweis: Wir setzen $u = g(x)$, $y = f(u)$, $u+k = g(x+h)$, also $k = g(x+h)-g(x)$. Dann gilt:

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(u+k) - f(u)}{k}\,\frac{k}{h} = \frac{f(u+k) - f(u)}{k}\,\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Für $h \to 0$ gilt auch $k \to 0$, somit folgt die Behauptung. qed.

Man bezeichnet $f'(g(x))$ als die äußere Ableitung und $g'(x)$ als die innere Ableitung. Eine andere Notation ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\ .$$

Verallgemeinerung auf mehrere Funktionen:

$$y = f(g(h(k(x)))), \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dh}\frac{dh}{dk}\frac{dk}{dx}\ .$$

Beispiel: $y = \sin^2 x$, äußere Funktion: $y = u^2$, innere Funktion: $u = \sin x$,

$$\frac{d\sin^2 x}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 2u\cos x = 2\sin x\cos x.$$

$\diamondsuit$

Beispiel: Für $y = \sin(x^2)$ ist $y = \sin u$ die äußere Funktion und $u = x^2$ die innere Funktion:

$$\frac{d\sin(x^2)}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos(x^2)2x = 2x\cos(x^2).$$

$\diamondsuit$

Beispiel: *Die Ableitung der Potenzfunktion.* Aus $x^a = e^{a\ln x}$ folgt

$$\frac{dx^a}{dx} = e^{a\ln x}\frac{a}{x} = x^a\frac{a}{x} = ax^{a-1}.$$

Die hier verwendete Differentiationsformel für $\ln x$ wird auf der folgenden Seite bewiesen. $\diamondsuit$

Differentiation der inversen Funktion

Satz 6.2.8: *Sei $f(x)$ in (a,b) differenzierbar und streng monoton, weiters sei $f'(x) \neq 0$, $x \in (a,b)$. Dann existiert die Umkehrfunktion f^{-1} und ist differenzierbar. Es gilt*

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\ .$$

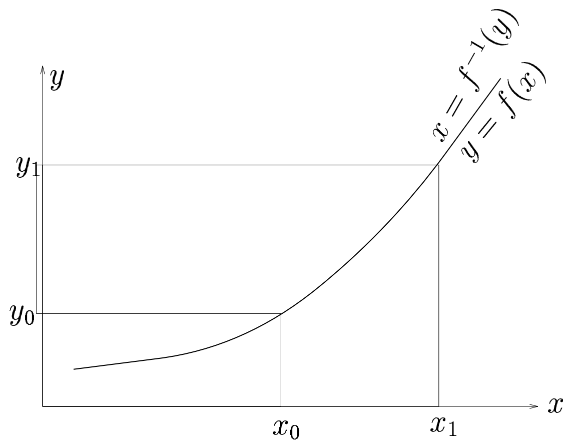

Abbildung 6.2: Differentiation der inversen Funktion

Beweis: Es sei $y = f(x)$ und $\eta = f(\xi)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\left(f^{-1}(y)\right)' &= \lim_{\eta\to y} \frac{f^{-1}(\eta) - f^{-1}(y)}{\eta - y} \\
&= \lim_{\xi\to x} \frac{\xi - x}{f(\xi) - f(x)} \\
&= \frac{1}{f'(x)} \\
&= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.
\end{aligned}$$

qed.

Beispiel: Die zyklometrischen Funktionen sind differenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{d \arcsin x}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1) \\
\frac{d \arccos x}{dx} &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1) \\
\frac{d \arctan x}{dx} &= \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Beweis für $\arcsin x$: Wir setzen

$$f(x) = \sin x, \qquad f^{-1}(x) = \arcsin x\ .$$

Dann gilt

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ .$$

$\diamondsuit$

Beispiel: Ableitung des Logarithmus.

Wir setzen $f(x) = a^x$, $f^{-1}(x) = \log_a x$. Dann gilt

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{\ln a\, a^{\log_a x}} = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}.$$

Daher gilt für den allgemeinen Logarithmus

$$\frac{d \log_a x}{dx} = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

und insbesondere für den natürlichen Logarithmus $\ln x = \log_e x$

$$\frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x}, \quad x > 0 \ .$$

$\diamondsuit$

Beispiel: Analog erhält man die Ableitungen der Areafunktionen:

$$\begin{aligned}
\frac{d(\operatorname{arsinh} x)}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x \in \mathbb{R} \\
\frac{d(\operatorname{arcosh} x)}{dx} &= \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1 \\
\frac{d(\operatorname{artanh} x)}{dx} &= \frac{1}{1-x^2}, \quad x \in (-1,1) \ .
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Definition 6.2.4: *$f\colon I = (a,b) \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar auf I, falls $f'(x)$ an jeder Stelle $x \in I$ existiert. Ist $f'(x)$ stetig auf I, so heißt $f(x)$* stetig differenzierbar *auf I, was man mit $f \in C^1(a,b)$ abkürzt.*

Definition 6.2.5: *$f(x)$ heißt* stetig differenzierbar *auf $[a,b]$, wenn f auf $[a,b]$ stetig ist, auf (a,b) differenzierbar und die einseitigen Grenzwerte $f'(a+)$, $f'(b-)$ existieren. Man schreibt dafür $f \in C^1[a,b]$.*

Bemerkung: Stetig differenzierbar auf $[a,b]$ bedeutet, daß die auf (a,b) definierte Ableitung $f'(x)$ stetig auf $[a,b]$ fortgesetzt werden kann. Dies macht Sinn, denn man kann zeigen, daß für $f \in C^1[a,b]$ die einseitigen Ableitungen $f'_+(a)$ und $f'_-(b)$ existieren und daß gilt

$$f'_+(a) = f'(a+), \quad f'_-(b) = f'(b-).$$

$\spadesuit$

Das folgende Beispiel zeigt, daß es nicht genügt nur die Existenz der einseitigen Ableitungen an den Randpunkten $x = a$ bzw. $x = b$ zu fordern.

Beispiel: Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2 \sin\frac{1}{x} & x \in (0,1] \end{cases}$$

ist stetig auf $[a,b]$. Für $x \neq 0$ ist die Ableitung nach der Produktregel

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \ .$$

Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)$ existiert nicht, d.h. $f'(0+)$ ist nicht definiert. Daher ist f nicht stetig differenzierbar auf $[0,1]$.

Trotzdem existiert die rechtseitige Ableitung an der Stelle $x=0$:

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \; h\sin\frac{1}{h} = 0 \; .$$

$\diamondsuit$

6.3 Lineare Approximation

Sei $f(x)$ differenzierbar bei x_0. Dann wird die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ durch die Tangentengleichung

$$y = t(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

beschrieben. Für $|x-x_0| \le a$ mit kleinem a ist $t(x)$ eine gute Approximation für $f(x)$, denn laut Definition der Ableitung gilt:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + \varepsilon(x_0,x)$$

mit $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x_0,x) = 0$. Anders geschrieben gilt

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \varepsilon(x,x_0)(x-x_0).$$

Da die Funktion $f(x)$ für x nahe bei x_0 gut durch die (affin) lineare Funktion $t(x)$ beschrieben wird, sagt man die Funktion f ist an der Stelle x_0 *linear approximierbar.*

Zusammenfassend gilt: Die Funktion f ist genau dann an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn f an der Stelle x_0 linear approximierbar ist.

In diesem Fall gilt:

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx t(x_0+\Delta x) - t(x_0) = f'(x_0)\Delta x \; .$$

Für eine differenzierbare Funktion f wird dieser einfache lineare Zusammenhang häufig zur Abschätzung

$$|\Delta y| \approx |f'(x_0)||\Delta x|.$$

der Änderung von y bei Änderung von x in der Fehlerrechnung verwendet.

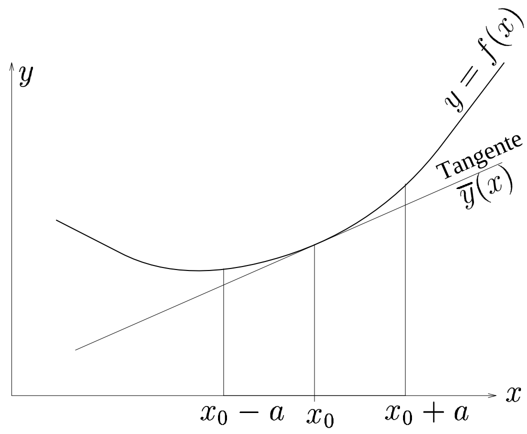

Abbildung 6.3: Lineare Approximation

6.4 Mittelwertsätze der Differentialrechnung

Satz 6.4.9: *$f(x)$ sei stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Dann gibt es mindestens einen Punkt $\xi \in (a, b)$, so daß gilt*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

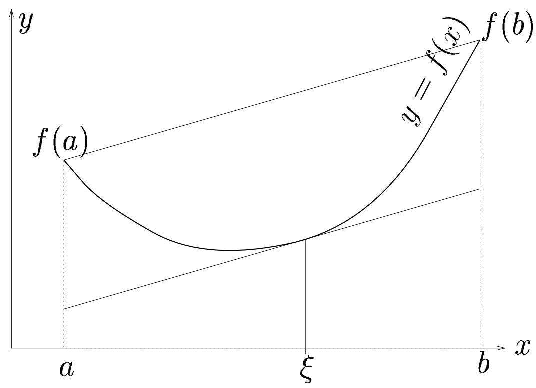

Abbildung 6.4: Mittelwertsatz

Geometrische Interpretation: Es gibt mindestens einen Punkt $\xi \in (a, b)$, an dem die Steigung der Tangente an den Graphen von f gleich der Steigung der Geraden durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist.

Zunächst zeigen wir:

Satz 6.4.10: *(von Rolle): Ist $f(x)$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) und gilt $f(a) = f(b)$, so gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

Beweis:

Falls f auf $[a,b]$ konstant ist, gilt $f'(\xi)=0$, $\forall \xi \in (a,b)$.

Andernfalls existiert ein Maximum von $f(x)$, das bei $\xi \in (a,b)$ angenommen wird. Dann gilt

$$\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} \quad \begin{cases} \leq 0, \text{ für } h>0 \;\Rightarrow\; f'_+(\xi) \leq 0 \\ \geq 0, \text{ für } h<0 \;\Rightarrow\; f'_-(\xi) \geq 0 \end{cases}$$

Da f differenzierbar ist, folgt: $f'(\xi)=f'_+(\xi)=f'_-(\xi)=0$.

Das Minimum von $f(x)$ werde bei $\zeta \in (a,b)$ angenommen. Analog zeigt man, daß auch $f'(\zeta)=0$ gelten muß.

Die Aussage des Satzes folgt nun, da f entweder konstant ist oder zumindest ein Maximum (Minimum) in (a,b) besitzt. qed.

Beweis: (des Mittelwertsatzes) Betrachte

$$\varphi(x)=f(x)-[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)] \; .$$

Es gilt $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ und folglich existiert nach dem Satz von Rolle ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$0=\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \; .$$

qed.

Verallgemeinerter (oder 2.) Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Satz 6.4.11: *Es seien f, g stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b). Dann $\exists \xi \in (a,b)$, so daß*

$$f'(\xi)(g(b)-g(a))=g'(\xi)(f(b)-f(a)).$$

Der Spezialfall $g(x)=x$ liefert den 1. Mittelwertsatz.

Beweis: Wir setzen

$$\varphi(x)=(f(x)-f(a))(g(b)-g(a))-(g(x)-g(a))(f(b)-f(a)) \; .$$

Es gilt $\varphi(a)=0=\varphi(b)$. Auf Grund des Satzes von Rolle liegt daher zwischen a und b eine Nullstelle von φ', d.h.: $\exists \xi \in (a,b)$ mit

$$0=f'(\xi)(g(b)-g(a))-g'(\xi)(f(b)-f(a)) \; .$$

qed.

Anwendungen des Mittelwertsatzes

Satz 6.4.12: *Sei f stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b) und $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$. Dann ist $f(x)$ konstant für alle $x \in [a,b]$.*

Beweis: Nach dem 1. Mittelwertsatz gilt

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2), \quad a \le x_1 < \xi < x_2 \le b \; .$$

Aus $f'(\xi) = 0$ folgt $f(x_1) = f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, d.h. f ist konstant. qed.

Satz 6.4.13: *Sei f stetig in $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b). Dann gilt:*

1. $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a,b)$ $\Longrightarrow$ *f ist streng monoton wachsend auf $[a,b]$;*
2. $f'(x) \ge 0$, $\forall x \in (a,b)$ $\Longrightarrow$ *f ist monoton wachsend auf $[a,b]$;*
3. $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a,b)$ $\Longrightarrow$ *f ist streng monoton fallend auf $[a,b]$;*
4. $f'(x) \le 0$, $\forall x \in (a,b)$ $\Longrightarrow$ *f ist monton fallend auf $[a,b]$.*

Beweis: ad 1) Es gilt

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2), \quad a \le x_1 < \xi < x_2 \le b \; .$$

Wegen $f'(x) > 0$, $x \in (a,b)$, ist insbesondere $f'(\xi) > 0$. Daraus folgt $f(x_1) - f(x_2) < 0$, also $f(x_2) > f(x_1)$, die Funktion ist streng monoton wachsend. Analoger Beweis für (2), (3) und (4). qed.

Beispiel: $f(x) = x^2$,

$$f'(x) = 2x \quad \begin{cases} > 0, & x > 0, \\ = 0, & x = 0, \\ < 0, & x < 0 \end{cases}$$

f ist streng monton wachsend auf $[0,\infty)$ und streng monoton fallend auf $(-\infty, 0]$.
$\diamondsuit$

Satz 6.4.14: *Sei f stetig differenzierbar auf $[a,b]$. Dann ist f Lipschitzstetig auf $[a,b]$, d.h.:*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le L|x_1 - x_2|, \quad x_1, x_2 \in [a,b].$$

mit $L = \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ als kleinstmöglicher Lipschitzkonstante.

Beweis: f ist stetig differenzierbar auf $[a, b]$, d.h.: f' ist stetig auf $[a, b]$, daher nimmt $|f'(x)|$ auf $[a, b]$ sein Maximum an. Für $\xi \in (x_1, x_2)$ gilt

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)(x_1 - x_2)| = |f'(\xi)||x_1 - x_2| \leq \max_{x \in [a,b]} |f'(x)||x_1 - x_2| \ .$$

qed.

Beispiel: Man gebe eine Lipschitzkonstante für $f(x) = \sqrt{x}$ auf $[a, b]$, $a > 0$, an. Laut vorigem Satz ist

$$L = \max_{x \in [a,b]} |f'(x)| = \max_{x \in [a,b]} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

die kleinste Lipschitzkonstante. ♢

6.5 Unbestimmte Formen

1. Die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$

Frage: Welchen Wert hat $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, wenn $f(a) = g(a) = 0$.

Beispiel: Bekanntlich gilt: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. ♢

Beispiel: Wie soll $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ berechnet werden? ♢

Regel von de l'Hospital

Satz 6.5.15: *Die Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien stetig und auf (a, b) differenzierbar. Es sei*

$$f(a) = g(a) = 0, \quad g'(x) \neq 0, \quad x \in (a, b),$$

und es existiere

$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \quad (\alpha = \pm\infty \text{ zugelassen!}).$$

Dann ist auch

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha.$$

Bemerkung: Eine analoge Version des Satzes gilt natürlich auch für den linksseitigen Grenzwert

$$\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} .$$

♠

Beweis: Aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad a < \xi < x \leq b.$$

ξ hängt von x ab, $\xi = \xi(x)$ und wegen $a < \xi < x$ folgt $\lim\limits_{x\to a+} \xi = a$. Also ist

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi\to a+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \alpha.$$

Damit ist der Beweis erbracht. qed.

Ist auch $\lim\limits_{x\to a+} f'(x) = \lim\limits_{x\to a+} g'(x) = 0$, $g''(x) \neq 0$, $x \in (a,b)$ und

$$\lim_{x\to a+} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \alpha,$$

so folgt

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \alpha, \text{ u.s.w.}$$

Nun können wir die Frage aus dem vorigen Beispiel beantworten:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Folgerung: (aus dem obigen Satz) $f, g : (a,\infty) \to \mathbb{R}$ seien stetig differenzierbar, $g'(x) \neq 0$ für genügend große x und

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha.$$

Dann folgt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{u\to 0+} \frac{f(\frac{1}{u})}{g(\frac{1}{u})} = \lim_{u\to 0+} \frac{f'(\frac{1}{u})(-\frac{1}{u^2})}{g'(\frac{1}{u})(-\frac{1}{u^2})} \\
&= \lim_{u\to 0+} \frac{f'(\frac{1}{u})}{g'(\frac{1}{u})} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha.
\end{aligned}$$

qed.

Beispiel: Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1 \ .$$

$\diamondsuit$

2. Die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$

Falls $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} = +\infty$, dann gilt

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Jetzt kann der obige Satz benutzt werden. Man kann die Regel von de l'Hospital aber auch direkt anwenden.

Satz 6.5.16: *Ist* $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} g(x) = +\infty$ *und* $\lim\limits_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$, *mit* $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, *dann ist*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha.$$

(Ein analoges Resulat gilt auch für $\lim\limits_{x\to a-}$ *und* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$*).*

Beispiel: Für $\alpha > 0$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0 \ .$$

$\diamondsuit$

Beispiel: Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n!} = \infty \ .$$

In Worten: e^x strebt schneller gegen unendlich als jede positive Potenz von x. $\diamondsuit$

Weitere unbestimmte Formen können auf die vorhergehenden zurückgeführt werden.

3. Die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$

Man schreibt

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

und erhält so die Form $\frac{0}{0}$.

4. Die unbestimmten Formen $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Man schreibt

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to a} e^{g(x) \ln f(x)}$$

Beispiel:

$$\lim_{x \to 0} (1 + \alpha x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}} = e^\alpha,$$

da

$$\frac{(\ln(1 + \alpha x))'}{(x)'} = \frac{\frac{\alpha}{1+\alpha x}}{1} \to \alpha \text{ für } x \to 0.$$

$\diamondsuit$

5. Die unbestimmte Form $\infty - \infty$

Man schreibt $\lim\limits_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$ und erhält die Form $\frac{0}{0}$.

6.6 Höhere Ableitungen

Definition 6.6.6: *$f \colon I \to \mathbb{R}$, I offenes Intervall, sei differenzierbar.*

1. *Falls die Ableitung $f' \colon I \to \mathbb{R}$ am Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar ist, heißt f* zweimal differenzierbar an der Stelle x_0 *und*

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) = f''(x_0) := (f')'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x + h) - f'(x)}{h}$$

   heißt 2. Ableitung von f an x_0.

2. *Ist f' selbst eine differenzierbare Funktion, so nennt man die Funktion f'' die 2. Ableitung von f, und f heißt* zweimal differenzierbar.

3. *Ist $f'' : I \to \mathbb{R}$ stetig, dann heißt f* zweimal stetig differenzierbar.

4. *Induktive Definition der k - ten* Ableitung, *$k \in \mathbb{N}$:*

$$\frac{d^k f}{dx^k}(x_0) := f^{(k)}(x_0) := (f^{(k-1)})'(x_0).$$

5. *$f : I \to \mathbb{R}$ heißt k - mal differenzierbar, wenn f in jedem Punkt von I k -* mal differenzierbar *ist.*

6. *$f : I \to \mathbb{R}$ heißt k - mal stetig differenzierbar, wenn k - mal differenzierbar ist und $f^{(k)}(x)$ auf I stetig ist, abgekürzt $f \in C^k(I)$.*

7. *f heißt* beliebig oft differenzierbar, *wenn für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt: f ist k - mal differenzierbar, abgekürzt $f \in C^\infty(I)$.*

Differentiation eines Produktes

Sei $y(x) = u(x)v(x)$, dann ist

$$y'(x) = u'v + uv' \text{ und}$$
$$y''(x) = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv''.$$

Das ist ein Spezialfall der *Leibniz'schen Produktregel*:

$$y^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x).$$

Beispiel: Die Ableitungen von $y = x^\alpha$ lauten:

$$\begin{aligned} y' &= \alpha x^{\alpha-1}, \\ y'' &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}, \\ y^{(n+1)} &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)x^{\alpha-n-1}. \end{aligned}$$

Wenn $\alpha = n$ folgt $y^{(n+1)} = 0$,

$$\frac{d^{n+1}x^n}{dx^{n+1}} = 0 \ .$$

Allgemeiner gilt für jedes Polynom $p_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$

$$\frac{d^{n+1}p_n(x)}{dx^{n+1}} = 0 \ .$$

Umgekehrt ist $p_n(x)$ die allgemeine Lösung der Aufgabe $f^{(n+1)}(x) = 0$. $\diamondsuit$

Beispiel: $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{IV}(x) = \sin x$. Allgemein gilt:

$$\sin^{(k)}(x) = \begin{cases} (-1)^m \cos x, & k = 2m+1 \\ (-1)^m \sin x, & k = 2m, \end{cases} \quad , \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

$\diamondsuit$

Definition 6.6.7: *Eine Funktion heißt* konvex auf einem Intervall I, *wenn für je zwei verschiedene Punkte x_1, $x_2 \in I$ und für alle $\lambda \in (0,1)$ stets gilt*

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

Gilt dagegen die umgekehrte Ungleichung, so heißt f konkav. *Stehen in der obigen Beziehung die Zeichen $<$ bzw. $>$, so heißt f* streng konvex *bzw.* streng konkav.

Geometrische Deutung: Es sei $x_1 < x_2$. Der Punkt $x(\lambda) := (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$ durchläuft das Intervall (x_1, x_2), wenn λ das Intervall $(0,1)$ durchläuft. Wegen

$$\begin{aligned} y(\lambda) &= (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \\ &= f(x_1) + \lambda[f(x_2) - f(x_1)] \\ &= f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x(\lambda) - x_1) \end{aligned}$$

durchläuft also $(x(\lambda), y(\lambda))$ bei dieser Bewegung von λ das Geradenstück g zwischen den Punkten $P_1 := (x_1, f(x_1))$ und $P_2 := (x_2, f(x_2))$. Konvexität von f bedeutet also, daß der Graph von f zwischen x_1 und x_2 immer unterhalb von g, Konkavität jedoch, daß er immer oberhalb von g verläuft, und dies für je zwei beliebige Punkte x_1, x_2 aus I. Konvexität und Konkavität hängen mit dem Monotonieverhalten der Ableitung zusammen.

Satz 6.6.17: *Die Funktion f sei auf I stetig und im Inneren desselben differenzierbar. Dann gilt:*

Wenn f' im Inneren des Intervalls wächst, dann ist f konvex auf I

Wenn f' im Inneren des Intervalls fällt, dann ist f konkav auf I.

Bei strengem Wachsen bzw. Fallen von f' ist f streng konvex bzw. streng konkav auf I.

Beweis: f' wachse auf I und $x_1 < x_2$ seien zwei Punkte aus I. Setzen wir $x := (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$, so müssen wir zeigen, daß für $\lambda \in (0,1)$ stets

$$(1-\lambda)f(x) + \lambda f(x) = f(x) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2), \tag{6.1}$$

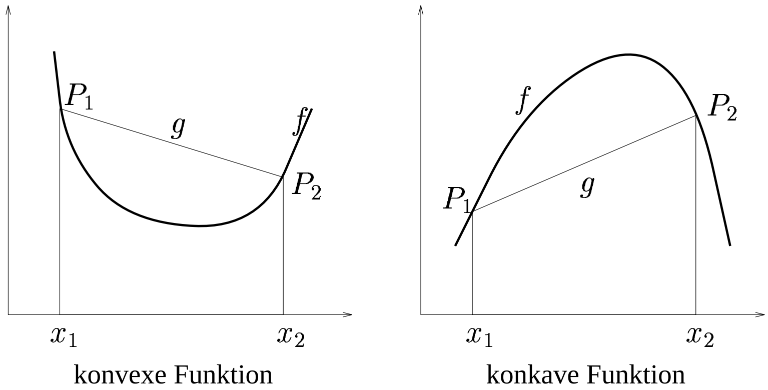

Abbildung 6.5: Konvexe und konkave Funktion

gilt, d.h.

$$(1-\lambda)(f(x)-f(x_1)) \leq \lambda(f(x_2)-f(x)).$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es Punkte $\xi_1 \in (x_1, x)$ und $\xi_2 \in (x, x_2)$ mit

$$f(x)-f(x_1) = f'(\xi_1)(x-x_1) \quad \text{und} \quad f(x_2)-f(x) = f'(\xi_2)(x_2-x)$$

Um (6.1) zu beweisen, brauchen wir nur noch zu zeigen, daß

$$(1-\lambda)(x-x_1)f'(\xi_1) \leq \lambda(x_2-x)f'(\xi_2)$$

gilt. Mit Hilfe der Gleichung

$$(1-\lambda)x + \lambda x = x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$$

sieht man, daß

$$(1-\lambda)(x-x_1) = \lambda(x_2-x),$$

und der Beweis ist erbracht, weil $\xi_1 \leq \xi_2$ und somit $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$ ist. Die restlichen Fälle behandelt man analog. qed.

Kombiniert man diesen Satz mit dem Monotonieresultat aus dem Abschnitt 6.4, so erhält man

Satz 6.6.18: *Ist die Funktion f auf dem Intervall I stetig und im Inneren desselben zweimal differenzierbar, so ist sie*

$$\begin{aligned} \textit{konvex, wenn} \quad & f''(x) \geq 0 \quad \textit{im Inneren,} \\ \textit{konkav, wenn} \quad & f''(x) \leq 0 \quad \textit{im Inneren,} \\ \textit{streng konvex, wenn} \quad & f''(x) > 0 \quad \textit{im Inneren,} \\ \textit{streng konkav, wenn} \quad & f''(x) < 0 \quad \textit{im Inneren.} \end{aligned}$$

Kapitel 7

Lokales und globales Verhalten von Funktionen

7.1 Der Taylorsche Lehrsatz

Satz 7.1.1: *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle $x_0 \in [a,b]$ und $x \in [a,b]$ die Taylorsche Formel:*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}(x) \end{aligned}$$

mit dem Restglied der Ordnung $n+1$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \vartheta \in (0,1).$$

Der Beweis wird später (in Abschnitt 12.3) geführt.

Beispiel: Betrachten wir die Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ um $x_0 = 0$, so ergeben sich mit $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ die Ableitungen $f^{(n)}(0) = n!$ und daher die Taylorentwicklung n-ter Ordnung $\sum_{k=1}^{n} x^k + R_{n+1}(x)$, die schon die geometrische Reihe erkennen läßt.

$\diamondsuit$

Beispiel: Für $f(x) = \cos x$ um $x_0 = 0$ ergeben sich mit $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x$ und $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \sin x$ die Ableitungen $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$ und $f^{(2n+1)}(0) =$

0, daher lautet die Taylorentwicklung $2n$-ter Ordnung

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \ + \ R_{2n+1}(x) \ .$$

$\diamondsuit$

7.2 Die Größenordnung von Funktionen

Es sei $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Man kann das Wachstum von f in der Umgebung eines Punktes x_0, der nicht unbedingt in D liegen muß, oft dadurch brauchbar beschreiben, daß man $f(x)$ mit einer *Referenzfunktion* $\varphi(x)$ vergleicht.

Definition 7.2.1: *Bleibt der Quotient* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *für alle* $x \in D$*, die hinreichend nahe* x_0 *liegen, beschränkt, so schreibt man symbolisch: „*$f(x) = O(\varphi(x))$ *für* $x \to x_0$*."*

In Worten: f *ist an der Stelle* x_0 *höchstens von derselben Größenordnung wie* φ*. Oder:* $f(x)$ *ist ein „groß O" von* $\varphi(x)$ *für* $x \to x_0$*.*

Gilt die stärkere Bedingung $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$*, so schreibt man symbolisch „*$f(x) = o(\varphi(x))$ *für* $x \to x_0$*":* $f(x)$ *ist ein „klein o" von* $\varphi(x)$ *für* $x \to x_0$*.*

Beliebte Vergleichsfunktionen ergeben sich aus den Potenzfunktionen:

$$\varphi(x) = |x - x_0|^\alpha$$

An der Stelle $x = x_0$ hat $\varphi(x)$ für

1. $\alpha > 0$ eine Nullstelle der Ordnung α,
2. $\alpha < 0$ einen Pol der Ordnung $-\alpha$, und für
3. $\alpha = 0$ ist $\varphi(x) \equiv 1$.

Beispiel: Für $f(x) = \sin x$ und $\varphi(x) = x$ gilt bekanntlich

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq 1$$

und daher $\sin x = O(x)$ für $x \to 0$. $\diamondsuit$

Die Vergleichsfunktionen $\varphi(x) = |x - x_0|^\alpha$ sind für die „groß-O-klein-o-Symbolik" im Zusammenhang mit der Taylorentwicklung sehr brauchbar:

Nach Satz 7.1 kann das Restglied für $|x - x_0| < \varepsilon$ wie folgt abgeschätzt werden:

$$|R_{n+1}(x)| \leq \left(\sup_{|x_1 - x_0| < \varepsilon} \frac{f^{(n+1)}(x_1)}{(n+1)!} \right) |x - x_0|^{n+1} = C|x - x_0|^{n+1},$$

also gilt $R_{n+1}(x) = O((x - x_0)^{n+1})$.

Beispiel: Taylorentwicklung zweiter Ordnung ergibt: $\sin x = x + 0x^2 + R_3(x) = x + O(x^3)$ für $x \to 0$. Weiter Entwickeln, hier etwa bis zum sechsten Grad, liefert analog eine genauere Näherung: $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)$ für $x \to 0$. ♢

Verhalten einer Funktion für $x \to \infty$

Definition 7.2 kann einfach auch auf $x_0 = +\infty$ und $x_0 = -\infty$ verwendet werden, wenn man sagt, $x \in D$ liegt in der Nähe von $+\infty$, genau dann, wenn x hinreichend groß ist:

Definition 7.2.2: *Bleibt der Quotient $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für alle $x \in D$, die hinreichend groß sind, beschränkt, so schreibt man: „$f(x) = O(\varphi(x))$ für $x \to +\infty$."*

Gilt die stärkere Bedingung $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$, so schreibt man „$f(x) = o(\varphi(x))$ für $x \to +\infty$."

Analoge Schreibweisen sind für $-\infty$ gebräuchlich, nur müssen die $x \in D$ nun hinreichend *klein* sein.

Beispiel:

$$f(x) = x^6 - x^{\frac{1}{2}} + 2 = x^6(1 - x^{-\frac{11}{2}} + 2x^{-6}), \quad x \geq 0,$$

weshalb $f(x) = O(x^6)$ für $x \to \pm\infty$. ♢

Beispiel: Es wurde bereits gezeigt, daß $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$, also

$$\ln x = o(x^\alpha), \quad x \to \infty.$$

In Worten: Der Logarithmus strebt langsamer gegen unendlich als jede Potenz von x. Es wurde auch gezeigt, daß $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{-x}}{x^\alpha} = 0$, also

$$e^{-x} = o(x^\alpha), \quad x \to \infty.$$

In Worten: Die Funktion e^{-x} strebt schneller gegen Null als jede (insbesondere negative) Potenz von x. ♢

7.3 Asymptotisches Verhalten

Mit den Begriffen „groß O“ und „klein o“ haben wir eine Möglichkeit gefunden, eine Funktion $f(x)$, üblicherweise etwa einen Approximationsfehler, an einem „interessanten“ Punkt x_0 durch den Vergleich mit einer Funktion φ zu beschränken.

Um das Verhalten einer (möglicherweise komplizierten) Funktion f an einer interessanten Stelle x_0 zu beschreiben, sucht man häufig eine (in der Regel einfachere) Funktion g gleichen Verhaltens.

Definition 7.3.3: *Gilt*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

oder gleichbedeutend

$$f(x) = g(x)(1 + r(x)) \quad \textit{mit} \quad \lim_{x \to x_0} r(x) = 0,$$

dann sagt man: $f(x)$ verhält sich bei x_0 asymptotisch wie $g(x)$ und schreibt

$$f(x) \sim g(x) \quad \textit{für} \quad x \to x_0$$

(Analoge Festsetzung für $x \to \pm\infty$.)

Als erstes sei darauf hingewiesen, daß $g(x)$ nicht eindeutig ist, ja daß es für gegebenes $f \neq 0$ immer unendlich viele Funktionen $g(x)$ gibt, die der Definition genügen. Das wird gleich an einem Beispiel veranschaulicht. Entscheidend ist aber nur, eine Funktion $g(x)$ zu finden, die einfacher gebaut ist als f und die man statt f für die Herleitung gewisser Aussagen oder für die graphische Darstellung verwenden kann.

Beispiel: $f(x) = x^2 + 2x + 1$. Leicht erkennt man, daß das asymptotische Verhalten von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$ durch $g(x) = x^2$ bestimmt ist:

$$f(x) \sim x^2, \quad x \to \pm\infty.$$

Präzise:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2} = 1.$$

Aber es gilt auch

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + \alpha x + \beta} = 1,$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. ◇

Beispiel: $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Es gilt daher

$$\cosh x \sim \frac{e^x}{2}, \quad x \to \infty, \qquad \cosh x \sim \frac{e^{-x}}{2}, \quad x \to -\infty.$$

Bei diesem Beispiel sieht man die Vergleichsfunktionen $g(x) = \frac{e^x}{2}$ bzw. $g(x) = \frac{e^{-x}}{2}$ sofort. Meistens ist das nicht so. $\diamondsuit$

Beispiel: $f(x) = \ln \sqrt{x^3 - 1}$, $x > 1$. Aus

$$\ln \sqrt{x^3 - 1} = \frac{1}{2} \ln x^3 (1 - \frac{1}{x^3}) = \frac{3}{2} \ln x + \frac{1}{2} \ln(1 - \frac{1}{x^3})$$

folgt

$$\ln \sqrt{x^3 - 1} \sim \frac{3}{2} \ln x, \quad x \to \infty.$$

$\diamondsuit$

Im Fehlerglied $r(x)$ steckt die Information, wie gut die Vergleichsfunktion $g(x)$ die ursprüngliche Funktion $f(x)$ bei Annäherung an x_0 approximiert. Wegen $r(x) = o(1)$ schreibt man auch oft $f(x) = g(x)(1 + o(1))$.

In den letzten beiden Beispielen gilt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$, aber trotzdem haben wir

$$f(x) = g(x) + g(x)r(x)$$

mit $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)r(x) = 0$. Die Vergleichsfunktionen $g(x)$ stellen also nicht nur im relativen sondern auch im absoluten Sinn gute Approximationen an die ursprünglichen Funktionen dar. Das kann manchmal sehr wichtig sein.

Beim ersten Beispiel mit $g(x) = x^2$ gilt jedoch $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x)r(x) = \pm\infty$.

Wir kommen jetzt zum Begriff der *Asymptote* einer Funktion. Das ist eine Gerade $y(x) = ax + b$, an die sich eine Funktion für $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$ oder in beiden Fällen annähert, d.h.

$$\lim_{x \to \infty} |f(x) - y(x)| = 0.$$

Die Asymptote stellt also im absoluten Sinn eine immer bessere Approximation an $f(x)$ dar, wenn x gegen unendlich strebt. Schließt man den Fall $y(x) = 0$ aus, dann kann man sofort zeigen, daß

$$f \sim y.$$

Die Umkehrung gilt nicht, d.h. eine Gerade, die im Sinne der obigen Definitionen asymptotisch zu f ist, muß nicht Asymptote sein.

Beispiel: $f(x) = x + \ln x$. Es gilt $f \sim x$, da

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \frac{\ln x}{x}$$

und bekanntlich $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$. Die Funktion $f(x)$ hat jedoch keine Asymptote. $\diamondsuit$

Hat eine Funktion an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Unendlichkeitsstelle, dann schmiegt sich der Graph der Funktion bei Annäherung an x_0 an die Gerade $x = x_0$ an. Man spricht in diesem Fall von einer vertikalen Asymptote.

7.4 Extremwerte

Wir gehen jetzt von der Annahme aus, daß die zu untersuchende Funktion in einer Umgebung eines Punktes x_0, der uns interessiert, genügend oft differenzierbar ist.

Ist $f(x)$ $(n+1)$ mal stetig differenzierbar in $(x_0 - a, x_0 + a)$, so folgt aus dem Taylorschen Lehrsatz mit $h := x - x_0$

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) \\ &\quad + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta h), \quad 0 < \vartheta < 1. \end{aligned}$$

Wir untersuchen zuerst die Frage der Lage des Graphen der Funktion in der Nähe des Punktes verglichen mit der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Man beachte dabei: Ist f k - mal stetig differenzierbar in einer Umgebung von x_0 und $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, so existiert wegen der Vorzeichenbeständigkeit stetiger Funktionen ein $\delta > 0$ mit

$$\operatorname{sign} f^{(k)}(x) = \operatorname{sign} f^{(k)}(x_0), \quad \text{für } |x - x_0| < \delta\ .$$

Für $n = 1$ gilt: Sei $f''(x_0) \neq 0$. Dann ist

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0 + \vartheta h).$$

Ist $f''(x_0) > 0$, so liegt die Funktion in der Umgebung von x_0 über der Tangente. Ist $f''(x_0) < 0$, so liegt sie darunter. Allgemein gilt: Seien die Ableitungen $f^{(k)}(x_0) = 0$ für $2 \le k \le n$, aber $f^{(n+1)}(x_0)$ sei ungleich null. Dann können wir schreiben

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta h).$$

Dabei müssen wir zwischen $(n+1)$ gerade und $(n+1)$ ungerade unterscheiden.

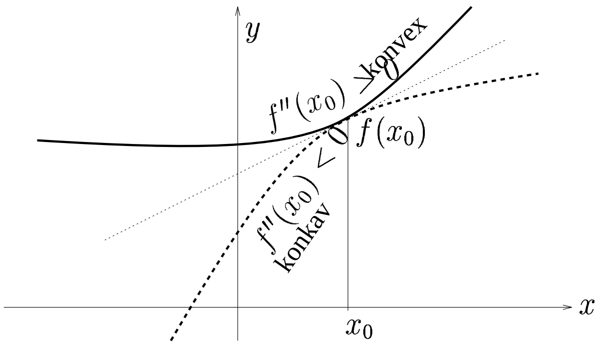

Abbildung 7.1: $f''(x_0)$ und das lokale Verhalten von f

1. Für $(n+1)$ gerade gilt $\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} > 0$ und der Graph von f liegt auf einer Seite der Tangente.

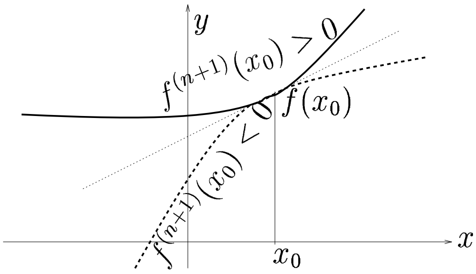

Abbildung 7.2: $(n+1)$ gerade

2. $(n+1)$ ungerade wechselt der Term $\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$ sein Vorzeichen bei $h = 0$ und der Graph von f durchsetzt die Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

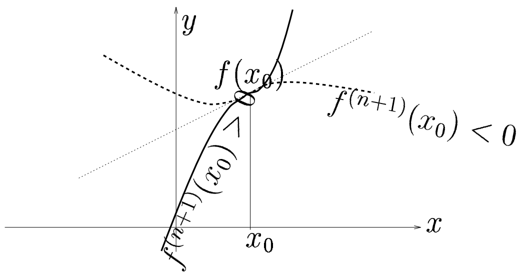

Abbildung 7.3: $(n+1)$ ungerade

Die Bestimmung von relativen Extremwerten einer Funktion

Definition 7.4.4: *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. $x_0 \in (a,b)$ heißt* relatives Maximum (Minimum)*, falls ein $\delta > 0$ existiert, so daß $f(x_0) \geq f(x)$ $(f(x_0) \leq f(x))$ für $|x - x_0| < \delta$.*

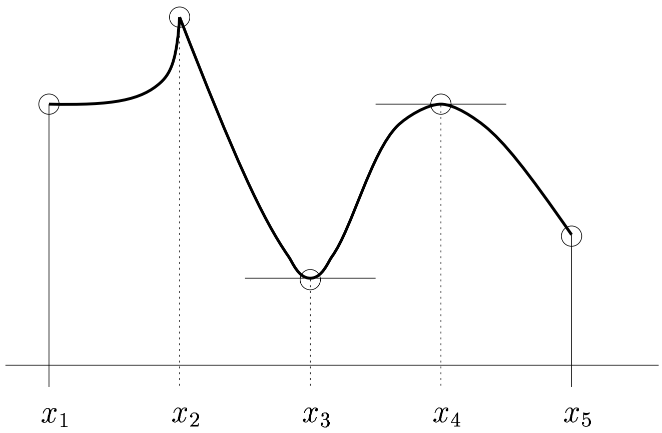

Abbildung 7.4: Relatives Maximum, relatives Minimum

Es sei f auf (a,b) differenzierbar. Dann ist die Bedingung

$$f'(x_0) = 0.$$

notwendig Bedingung für das Vorliegen eines relativen Extremums an der Stelle x_0 (siehe den Beweis des Satzes von Rolle).

Hinreichende Bedingungen für das Vorliegen eines relativen Extremums erhält man über die höheren Ableitungen.

Satz 7.4.2: *Sei $f'(x_0) = 0$, $f^{(k)}(x_0) = 0$ für $2 \leq k \leq n$, jedoch $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$.*

1. *Im Fall $(n+1)$ gerade ist x_0 für $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ ein lokales Minimum, für $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ ein lokales Maximum.*

2. *Für $(n+1)$ ungerade ist x_0 kein lokales Extremum, sondern ein* Sattelpunkt*, d.h. in jeder Umgebung von x_0 gibt es Punkte mit $f(x) > f(x_0)$ und mit $f(x) < f(x_0)$.*

Beispiel: $f(x) = x \ln x$. Es ist $f'(x) = \ln x + 1$ und $f''(x) = \frac{1}{x}$. Die Gleichung $f'(x) = 0$ ergibt $x = \frac{1}{e}$ mit $f''\left(\frac{1}{e}\right) = e > 0$, also haben wir den einzigen Extremwert von f bei $x = \frac{1}{e}$ als Minimum erkannt. $\diamondsuit$

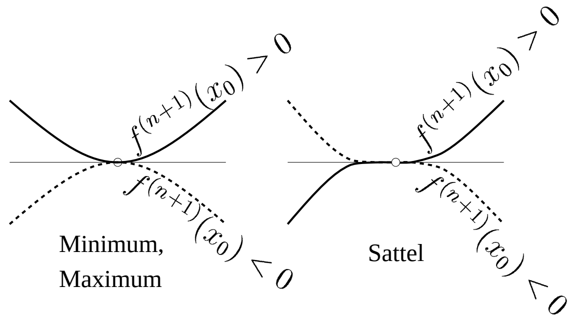

Abbildung 7.5: Minimum, Maximum und Sattelpunkt

7.5 Kurvendiskussion

1. Zuerst bestimmt man den Definitionsbereich der Funktion f. In den praktisch vorkommenden Fällen wird er ein Intervall oder eine Vereinigung von endlich vielen Intervallen sein.

2. Man untersucht, ob die Funktion gerade, ungerade, oder periodisch ist.

3. Man untersucht die Funktion auf Unstetigkeitsstellen, insbesondere auf Sprungstellen und Polstellen.

4. Dann bestimmt man die Nullstellen von f, f' und f'' (vorausgesetzt, daß f zweimal differenzierbar ist). Dieser Schritt wird meist sehr schwierig sein und man wird sich gewöhnlich mit Näherungen begnügen müssen.

5. Mit Hilfe dieser Nullstellen grenzt man die Bereiche ab, in denen f

   positiv bzw. negativ
   wachsend bzw. fallend
   konvex bzw. konkav

   ist.

6. Man vermerkt die Stellen lokaler Extrema und die Extremwerte.

7. Man bestimmt die Wendepunkte mit den zugehörigen Funktionswerten und Tangentensteigungen. Beim Durchgang durch einen Wendepunkt wechselt die Funktion von konkaver zu konvexer Krümmung über, oder umgekehrt.

8. Ist a ein Randpunkt des Definitionsbereiches, (a kann auch $\pm\infty$ sein), so wird man versuchen

   $$\lim_{x\to a} f(x) \quad \text{(und u.U. auch} \quad \lim_{x\to a} f'(x))$$

   zu bestimmen.

9. Man bestimmt eventuell vorhandene Asymptoten.

Die so gesammelte Information, möglicherweise verbunden mit der Berechnung der Funktionswerte an einigen zusätzlichen Stellen, wird meist genügen, um den Graph von f zu zeichnen.

Beispiel: $f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2}$. f ist für $|x| \leq 1$ definiert und ist weder gerade noch ungerade. Für $|x| < 1$ ist

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - x + 1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-2x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad \text{und}$$
$$f''(x) = \frac{2x^3 - 3x - 1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x^2 - 2x - 1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}.$$

Die Nullstellen von f sind $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$; zwischen ihnen ist f positiv. Die Nullstelle $x_1' = \frac{1}{2}$. Auf $(-1, \frac{1}{2})$ ist f' positiv, also f streng wachsend, während auf $(\frac{1}{2}, 1)$ f' negativ, also f streng fallend ist.

Zur Bestimmung der Nullstellen von f'' löst man die Gleichung $2x^2 - 2x - 1 = 0$. Die Lösungen sind $x_1'' = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ und $x_2'' = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Es liegt nur $x_1'' = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ in $(-1, 1)$, also ist x_1'' die einzige Nullstelle von f''. Auf $(-1, x_1'')$ ist f'' positiv, also f konvex, während auf $(x_1'', 1)$ f'' negativ, also f konkav ist.

x_1' ist Stelle eines lokalen Maximums von f; das zugehörige Maximum ist $f(x_1') = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. Andere Extrema sind nicht vorhanden.

x_1'' ist der einzige Wendepunkt von f. Der zugehörige Funktionswert $f(x_1'')$ ist näherungsweise 0,59.

Offenbar ist $\lim\limits_{x\to 1-} f'(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to -1+} f'(x) = 0$. Aufgrund der bisher ermittelten Eigenschaften der Funktion f ist es nun ein Leichtes, ihr Schaubild zu zeichnen. ◊

Beispiel: $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$. f ist auf $\mathbb{R}^+$ definiert, und dort ist

$$f'(x) = x^x(1 + \ln x), \quad f''(x) = x^{x-1} + x^x(1+\ln x)^2.$$

f ist immer positiv. f' besitzt die einzige Nullstelle $x_1' = \frac{1}{e}$ und ist negativ auf $(0, \frac{1}{e})$, positiv auf $(\frac{1}{e}, \infty)$; infolgedessen ist f auf $(0, \frac{1}{e})$ streng fallend, auf $(\frac{1}{e}, \infty)$ streng wachsend, und x_1' ist die Stelle eines lokalen Minimums von f; das zugehörige Minimum $f(x_1')$ ist näherungsweise 0,69. Da f'' positiv ist, muß f streng konvex sein. Schließlich ist

$$\begin{array}{rclrcl} \lim\limits_{x\to 0+} f(x) & = & 1, & \lim\limits_{x\to\infty} f(x) & = & \infty, \\ \lim\limits_{x\to 0+} f'(x) & = & -\infty, & \lim\limits_{x\to\infty} f'(x) & = & \infty. \end{array}$$

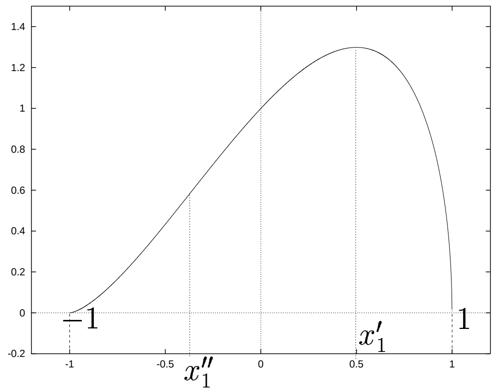

Abbildung 7.6:

Berechnet man einige Funktionswerte, so erhält man Abb. 7.7. $\diamondsuit$

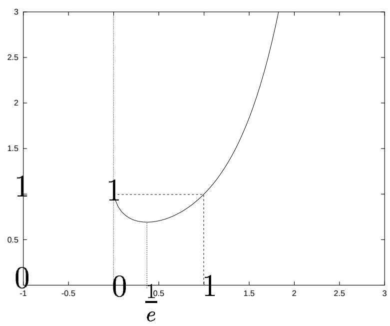

Abbildung 7.7: $f(x) = x^x$

Beispiel: $f(x) = \frac{x^3}{x^2-16}$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{4, -4\}$. Die Stellen $x = -4$ und $x = 4$ sind Pole erster Ordnung, an denen sich vertikale Asymptoten befinden. Man zeigt leicht, daß

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{x^4 - 48x^2}{(x^2-16)^2}, \\
f''(x) &= 32\frac{x^3 + 48x}{(x^2-16)^3}, \\
f'''(x) &= -96\frac{x^4 + 96x + 256}{(x^2-16)^4}.
\end{aligned}
$$

Die Funktion ist ungerade: $f(-x) = -f(x)$; der Graph liegt also symmetrisch zum Ursprung. Die Nullstellen von f: $x_1 = 0$ ist dreifache Nullstelle.

f' hat die zweifache Nullstelle $x_1' = 0$ und die einfachen Nullstellen $x_{2,3}' = \pm\sqrt{48}$.

Es gilt

$$\begin{aligned} f''(0) &= 0 \\ f''(\sqrt{48}) &\approx 0,6 \;>\; 0 \quad \text{(Minimum)} \\ f''(-\sqrt{48}) &\approx -0,6 \;<\; 0 \quad \text{(Maximum).} \end{aligned}$$

Wendepunkte: $f''(x) = 0$; $x(x^2 + 48) = 0$ hat nur eine reelle Lösung $x_1'' = 0$. Da $f'''(0) = -\frac{3}{8} \neq 0$, liegt ein Wendepunkt vor. Wendetangente: $y \equiv 0$ (x - Achse!).

Die Funktion ist für $x > 0$ konvex, für $x < 0$ konkav.

Asymptoten:

1. vertikale Asymptoten: $x = -4$, $x = -4$.
2. schiefe Asymptote: $x^3 : (x^2 - 16) = x + \frac{16x}{x^2-16}$, daher ist die erste Mediane $y = x$ eine Asymptote.

Die Funktion ist in Abb. 7.8 dargestellt. $\diamondsuit$

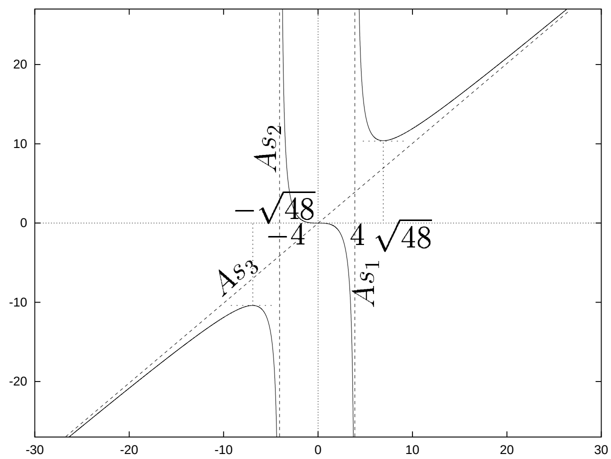

Abbildung 7.8: $f(x) = \frac{x^3}{x^2-16}$

Beispiel: Die kritische Temperatur T_{krit} eines Stoffes ist jene, ab der der Stoff bei keinem Druck flüssig vorkommt. Genau bei $T = T_{krit}$, weiß der Physiker, hat der Druck als Funktion

$$p(V) = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \qquad \text{(Gleichung von van der Waal)}$$

des Volumens einen Wendepunkt mit horizontaler Tangente.

Die entsprechenden Bedingung $0 = p'(V) = p''(V)$ ergibt konkret $\frac{RT_{krit}}{(V-b)^2} = \frac{2a}{V^3}$ und $\frac{RT_{krit}}{(V-b)^3} = \frac{3a}{V^4}$. Kreuzweises Multiplizieren ergibt

$$\frac{RT_{krit}}{(V-b)^2}\frac{3a}{V^4} = \frac{RT_{krit}}{(V-b)^3}\frac{2a}{V^3}$$

und nach Kürzen $3(V-b) = 2V$, also $V = 3b$.

Einsetzen in $\frac{RT_{krit}}{(V-b)^2} = \frac{2a}{V^3}$ liefert schließlich $T_{krit} = \frac{8a}{27bR}$. $\diamondsuit$

Kapitel 8

Iterationsverfahren

8.1 Ein Fixpunktsatz

Das explizite Lösen einer nichtlinearen Gleichung

$$f(x) = 0$$

ist nur in Ausnahmefällen möglich. Daher verwendet man in der Praxis Iterationsverfahren, die rekursiv eine Folge von Näherungswerten erzeugen, die (möglicherweise) gegen eine Nullstelle konvergiert.

Dabei ist es oft günstiger ein Fixpunktproblem zu lösen. Ein Fixpunkt einer Funktion g ist ein Punkte ξ mit der Eigenschaft $\xi = g(\xi)$.

Man kann jedes Nullstellenproblem trivial als Fixpunktproblem schreiben:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = x - f(x) = x.$$

Das einfachste und wichtigste Iterationsverfahren zur Berechnung von Fixpunkten ist die folgende Fixpunktiteration:

Ausgehend von einem Startwert x_0 wird die rekursive Folge

$$x_{n+1} = g(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

generiert.

Das Verhalten dieser Folge wird für die in der Praxis wichtigsten Situationen durch den folgenden Satz beschrieben:

Satz 8.1.1: *Ist $g : [a,b] \to [a,b]$, $(a < b)$ auf $[a,b]$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-konstante $L < 1$ dann besitzt g in $[a,b]$ genau einen Fixpunkt ξ, und dieser ist der Grenzwert jeder durch die Rekursion $x_{n+1} = g(x_n)$, $(n = 0,1,2,\ldots)$, definierten Folge, sofern $x_0 \in [a,b]$ ist.*

Die Konvergenz ist mindestens linear, d.h. es gilt

$$|x_{n+1} - \xi| \leq L|x_n - \xi|, \quad (n \geq 0).$$

Bemerkung: Dieser Satz ist ein Spezialfall des viel allgemeineren *Fixpunktsatzes von Banach* (siehe Höhere Analysis). ♠

Beweis: Nach dem Zwischenwertsatz (Satz 5.4.9) hat g einen Fixpunkt ξ in $[a,b]$.

Die Lipschitz-stetigkeit von g bedeutet für alle $x, y \in [a,b]$

$$|g(y) - g(x)| \leq L|y - x| \ .$$

Daher kann g in $[a,b]$ auch nicht mehr als einen Fixpunkt haben kann, sonst ergäbe sich der Widerspruch

$$|\eta - \xi| = |g(\eta) - g(\xi)| < |\eta - \xi|.$$

Setzen wir $x_n = g^n(x_0)$. Aus obiger Ungleichung sieht man leicht für jedes $x_0 \in [a,b]$

$$|x_n - \xi| \leq L|x_{n-1} - \xi| \leq L^2|x_{n-2} - \xi| \leq \ldots \leq L^n|x_0 - \xi| \leq L^n(b-a),$$

woraus die Konvergenz $x_n \to \xi$ folgt. qed.

Bemerkung: Falls g auf $[a,b]$ einmal stetig differenzierbar ist, ist

$$L = \max_{x \in [a,b]} g'(x)$$

die kleinstmögliche Lipschitzkonstante auf $[a,b]$. ♠

Beispiel: Gesucht ist eine Lösung der Gleichung $x = \cos x$, oder anders ausgedrückt ein Fixpunkt der Funktion cos.

Natürlich gilt (im Bogenmaß)

$$\cos : [0,1] \to [0,1] \ .$$

Wegen $|\cos' x| = \sin x$ ist cos auf dem Intervall $[0, 1]$ Lipschitzstetig mit einer Lipschitzkonstante $L < 1$, daher folgt aus obigem Satz die Existenz eines eindeutigen Fixpunktes ξ, der mittels Fixpunktiteration berechnet werden kann.

Das lustvolle Iterieren des Cosinus mit dem Taschenrechner sei an dieser Stelle dem Leser überlassen:

- Startwert $x_0 \in [\varepsilon, 1]$ eintippen.
- cos-Taste immer wieder drücken.

Und: Nicht vergessen: Wir rechnen im Bogenmaß! $\diamondsuit$

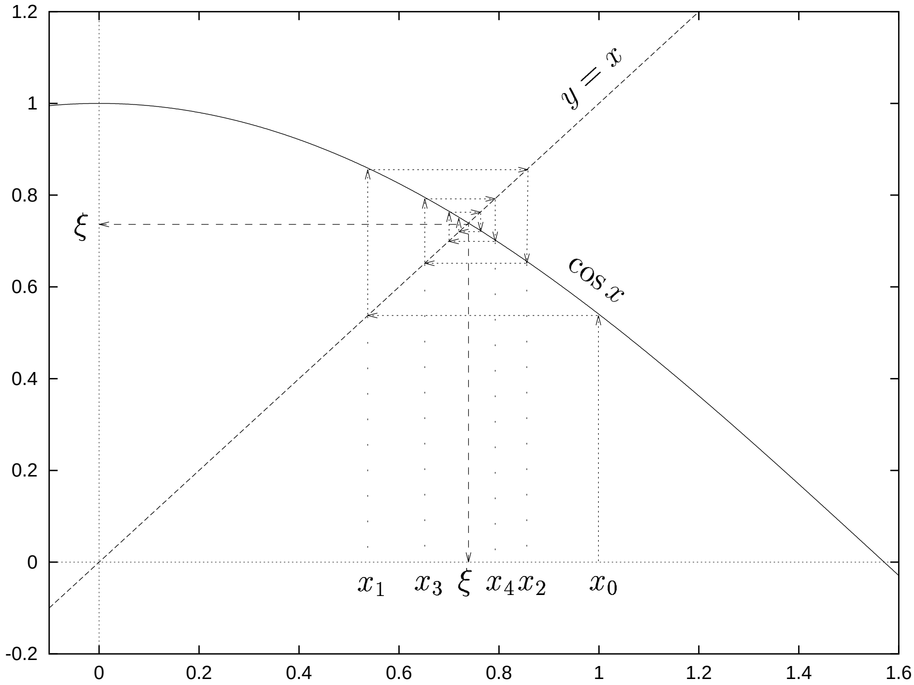

Abbildung 8.1: Iteration des Cosinus ausgehend von $x_0 = 1$, Spinnwebdiagramm

Für stetig differenzierbares g ist die Bedingung $|g'(\xi)| < 1$ hinreichend für die Konvergenz der Fixpunktiteration gegen den Fixpunkt ξ, falls man nur x_0 nahe genug beim Fixpunkt ξ liegt. Man mache sich das anhand einiger einfacher Skizzen klar. Welche Bedeutung hat das Vorzeichen von $g'(\xi)$?

Gegen eine Fixpunkt ξ mit $|g'(\xi)| > 1$ ist im allgemeinen keine Konvergenz zu erwarten, wie das folgende einfache Beispiel illustriert.

Beispiel: Sei $g(x) = 2x - 1$. Einziger Fixpunkt ist offensichtlich $\xi = 1$.

Nachrechnen oder ein Blick auf Abbildung 8.1 zeigt, daß außer für $x_0 = \xi$ die Folge der x_n divergiert.

Ähnliches gilt für $g(x) = 3 - 2x$. $\diamondsuit$

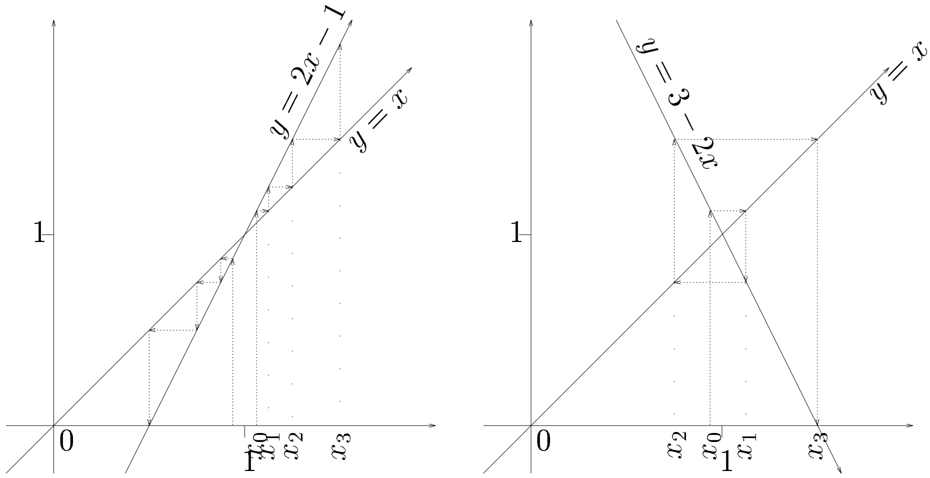

Abbildung 8.2: Spinnwebdiagramme: Iteration von $x \mapsto 2x - 1$, ausgehend von zwei verschiedenen Startwerten, und Iteration von $x \mapsto 3 - 2x$

Obige Beispiele lassen auch die Bedeutung des Vorzeichens von $g'(\xi)$ erahnen.

8.2 Das Newton-Verfahren

Das in der Praxis wichtigste Verfahren zum Finden von Nullstellen ist das Newtonverfahren, das zuerst geometrisch hergeleitet und dann mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes analysiert wird.

Gegeben seien eine Funktion f, die in einer Umgebung der Nullstelle ξ differenzierbar ist, und ein Näherungswert x_0 für diese Nullstelle. Wir suchen nun den Schnittpunkt zwischen der Tangente an die Kurve $y = f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ und der x - Achse und definieren seine Abszisse als nächsten Näherungswert:

$$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Legen wir jetzt die Tangente an den Punkt $(x_1, f(x_1))$ und schneiden diese wiederum mit der x - Achse, so erhalten wir die Abszisse dieses Schnittpunktes x_2 als Verbesserung von x_1.

Rekursiv sind daher die Glieder der Näherungsfolge definiert durch:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

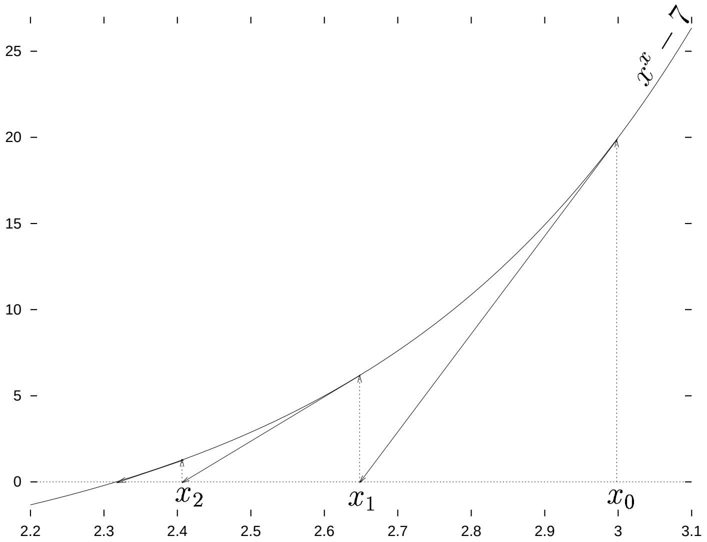

Abbildung 8.3: Newtonverfahren am Beispiel $f(x) = x^x - 7$

Setzen wir $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, so entspricht das Newtonverfahren der iterativen Lösung der Fixpunktaufgabe für g.

Ist ξ eine Nullstelle von f mit $f'(\xi) \neq 0$, so ist

$$g'(\xi) = 1 - \frac{f'(\xi)^2 - 0}{f'(\xi)^2} = 0,$$

was für hinreichend glatte f bedeutet, daß L beliebig klein gewählt werden kann, wenn man den Startwert für die Iteration von g nur nahe genug der gesuchten Nullstelle von f wählt.

Da die Näherungswerte $x_n \to x_0$ streben, kann man die Lipschitzkonstante L für die Banachsche Fixpunktiteration von g im Verlauf der Iteration immer kleiner ansetzen, was bedeutet: Konvergiert die Iteration von g, dann konvergiert sie „immer rascher“.

Diesen Sachverhalt präzisiert der Satz, der folgend ohne Beweis angegeben ist:

Satz 8.2.2: *Sei f in einer Umgebung der Nullstelle ξ zweimal stetig differenzierbar und $f'(\xi) \neq 0$. Dann existiert eine (möglicherweise kleine) Umgebung* *der Nullstelle, so daß das Newton - Verfahren von jedem Startwert aus dieser Umgebung quadratisch gegen die Nullstelle konvergiert.*

Das heißt, $x_n \to \xi$ und es gibt ein $C > 0$, sodaß

$$|x_{n+1} - \xi| \le C|x_n - \xi|^2, \quad n \ge 0,$$

gilt.

Anschaulich bedeutet die quadratische Konvergenz, daß sich die Anzahl der korrekten Stellen der Näherung x_n in jedem Schritt verdoppelt.

Beispiel: Wir suchen die Lösung von $f(x) = x^x - 7 = 0$. Es ist $f'(x) = (1+\ln x)x^x$ und daher die zu iterierende Funktion

$$g(x) = x - \frac{x^x - 7}{x^x(1 + \ln x)} \ .$$

Wir starten mit $x_0 = 3$.

$$\begin{aligned}
x_0 &= 3.000000, & f(x_0) &= 20.000000, \\
x_1 &\approx 2.647033, & f(x_1) &\approx 6.154006, \\
x_2 &\approx 2.409963, & f(x_2) &\approx 1.329735, \\
x_3 &\approx 2.325032, & f(x_3) &\approx 0.111470, \\
x_4 &\approx 2.316531, & f(x_4) &\approx 0.000978, \\
x_5 &\approx 2.316455, & f(x_5) &\approx 0.000000, \\
x_6 &\approx 2.316455, & f(x_6) &\approx 0.000000.
\end{aligned}$$

Man sieht, daß die Konvergenzgeschwindigkeit dramatisch wächst, sobald die Näherungswerte ξ nahekommen.

Diesem Beispiel entstammt Abbildung 8.3. $\diamondsuit$

Definition 8.2.1: *Ein Iterationsverfahren habe den Fixpunkt ξ. Der* Einzugsbereich *von ξ ist die Menge aller Startwerte, für welche das Iterationsverfahren gegen ξ konvergiert.*

Daß das Newtonverfahren i.a. nur konvergiert, wenn der Startwert nahe genug ξ ist, veranschaulicht das folgende **Beispiel:** Wir „suchen" die Nullstelle $\xi = 0$ von $\arctan x$, ausgehend vom, würde ein Kenner der Materie befinden, etwas entlegenen Startwert $x_0 = \frac{3}{2}$. Die Iteration

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\arctan x_n}{1 + x_n^2}$$

ergibt:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1.500000, \quad f(x_0) \approx 0.982794,\\
x_1 &\approx -1.694080, \quad f(x_1) \approx -1.037546,\\
x_2 &\approx 2.321127, \quad f(x_2) \approx 1.164002,\\
x_3 &\approx -5.114088, \quad f(x_3) \approx -1.377695,\\
x_4 &\approx 32.295684, \quad f(x_4) \approx 1.539842,\\
x_5 &\approx -1575.316951, \quad f(x_5) \approx -1.570162,\\
x_6 &\approx 3894976.007761, \quad f(x_6) \approx 1.570796 \approx \frac{\pi}{2},\\
x_7 &\approx -23830288973552.098, \quad f(x_7) \approx -1.570796 \approx \frac{-\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Abbildung 8.4 zeigt, wie im Verlauf der Newtoniteration immer wilder hin und

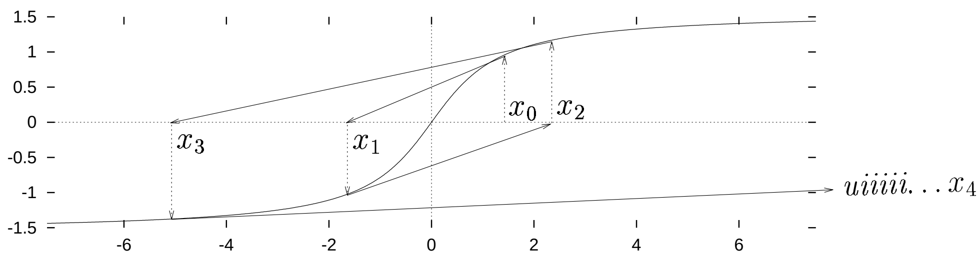

Abbildung 8.4: Divergente Newtoniteration für $\arctan x = 0$

her gesprungen wird. $\diamondsuit$

Kapitel 9

Das Riemannsche Integral

9.1 Einführung

Aufgabenstellung: Ermittlung der „Fläche“ des von $f(x)$ über $[a,b]$ bestimmten *Normalbereichs*.

f sei auf $[a,b]$ beschränkt und $f(x) > 0$. Der von f über $[a,b]$ aufgespannte Normalbereich ist definiert als die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$. Wir nennen $T = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ eine *Teilung* oder

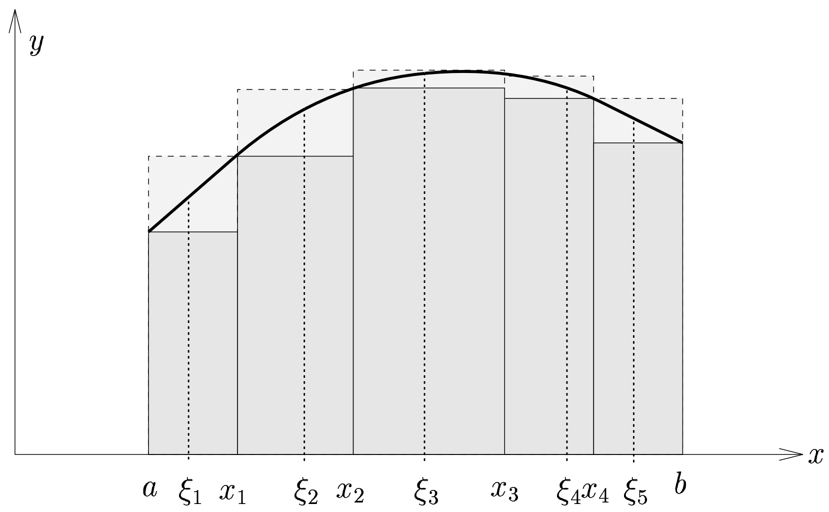

Abbildung 9.1: Riemann-Integral

Zerlegung von $[a,b]$; $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ sei ein *Teilintervall* mit der *Länge* $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $i = 1, \ldots, n$.

Die größte untere bzw. kleinste obere Schranke von f auf I_i seien

$$m_i := \inf_{x \in I_i} f(x), \quad M_i := \sup_{x \in I_i} f(x).$$

$$U(f;T) := m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \cdots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

heißt die zur Zerlegung T des Intervalls $[a,b]$ gehörige *Untersumme* von f,

$$O(f;T) := M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \cdots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

die zur Zerlegung gehörige *Obersumme*. Mit Hilfe der *Zwischenstellen*

$$Z := \{\xi_1, \ldots, \xi_n; \xi_i \in I_i\}$$

definieren wir die Riemann'sche *Zwischensumme*

$$R(f;T,Z) := f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Es gilt

$$U(f;T) \leq R(f;T,Z) \leq O(f;T).$$

Aus $m := \inf_{x \in [a,b]} f(x) \leq m_i$, $M := \sup_{x \in [a,b]} f(x) \geq M_i$, folgt

$$m(b-a) = m(\Delta x_1 + \cdots + \Delta x_n) \leq m_1 \Delta x_1 + \cdots + m_n \Delta x_n \leq U(f;T),$$

also $m(b-a) \leq U(f;T)$, und analog $M(b-a) \geq O(f;T)$, so daß schließlich,

$$m(b-a) \leq U(f;T) \leq R(f;T,Z) \leq O(f;T) \leq M(b-a).$$

Vorgangsweise zur Definition eines Flächenintegrals

Wir betrachten eine Folge von immer feiner werdenden Zerlegungen T_n und erhalten so eine Folge von Untersummen $U(f;T)$, die monoton wachsend und nach oben beschränkt ist und eine Folge von Obersummen $O(f;T)$, die monoton fallend und nach unten beschränkt ist. Es gilt daher

$$\lim_{n \to \infty} U(f;T) =: \underline{J}, \quad \lim_{n \to \infty} O(f;T) =: \overline{J},$$

mit $\underline{J} \leq \overline{J}$. Falls $\underline{J} = \overline{J} =: J$, so stellt J den gesuchten Flächeninhalt dar, symbolisch

$$J = \int_a^b f(x)dx.$$

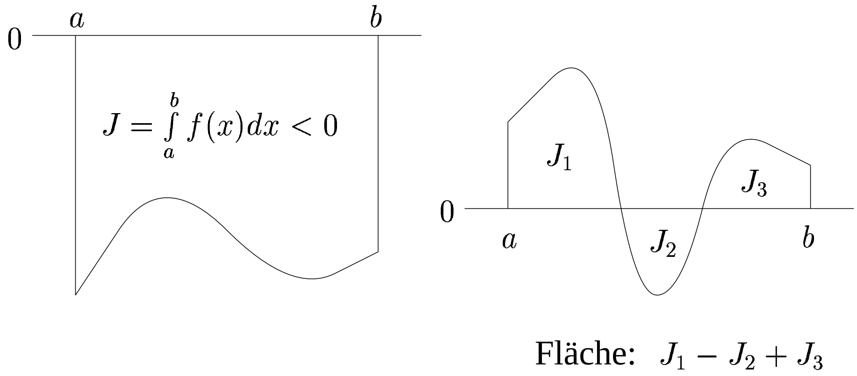

Abbildung 9.2: Flächeninhalte

Die Voraussetzung $f(x) > 0$ ist nicht notwendig, f muß nur beschränkt sein. Die oben aufgestellten Ungleichungen gelten unabhängig davon.

Notation: $l(T) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i$ heißt die Länge der Zerlegung $\{T\}$; eine Folge von Zerlegungen von $[a, b]$ heißt *ausgezeichnete Zerlegungsfolge*, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} l(T_n) = 0$.

Definition 9.1.1: *Die Zerlegung T' heißt* feiner *als T, wenn T' aus T durch Hinzunahme zusätzlicher Teilungspunkte entsteht. Notation: $T \subset T'$.*

Beispiel: Fortgesetztes Halbieren liefert eine ausgezeichnete Teilungsfolge. (mit $T_n \subset T_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$) $\diamondsuit$

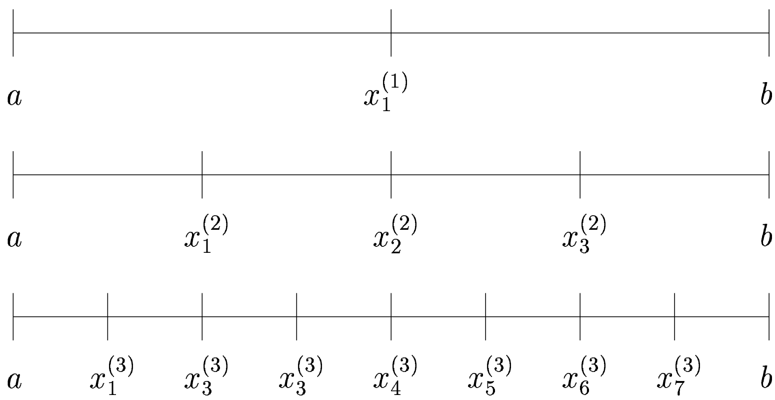

Abbildung 9.3: Fortgesetztes Halbieren liefert eine ausgezeichnete Teilungsfolge.

Eigenschaften von Ober- und Untersummen

Hilfssatz: Falls $T \subset T'$, dann gilt

1. $U(f;T) \leq U(f;T')$,
2. $O(f;T) \geq O(f;T')$.

Beweis:

1. Es genügt den Fall zu untersuchen, daß T' einen Teilungspunkt mehr hat als T. Sei u der neuer Teilungspunkt. Dann gilt mit $m_i \leq m_i'$ und $m_i \leq m_i''$

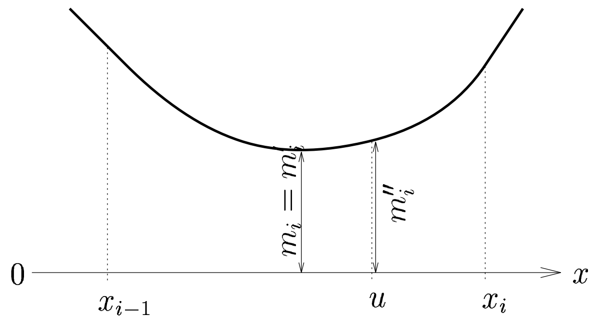

Abbildung 9.4: Ein zusätzlicher Teilungspunkt, u

$$\begin{aligned} m_i &= \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \\ m_i' &= \inf_{x \in [x_{i-1}, u]} f(x), \\ m_i'' &= \inf_{x \in [u, x_i]} f(x). \end{aligned}$$

Der Beitrag von I_i zu $U(f;T)$ ist $m_i(x_i - x_{i-1})$. Der entsprechende Beitrag zu $U(f;T')$ ist mit $m_i'(u - x_{i-1}) + m_i''(x_i - u)$ gegeben. Daher gilt

$$m_i'(u - x_{i-1}) + m_i''(x_i - u \geq m_i(u - x_{i-1}) + m_i(x_i - u) = m_i(x_i - x_{i-1}).$$

2. analog.

qed.

Satz 9.1.1: *Seien T und T' beliebige Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$. Dann gilt $U(f;T) \leq O(f;T')$.*

Beweis: Bilde $T^* = T \cup T'$. Wegen $T \subset T^*$, $T' \subset T^*$ gilt

$$U(f;T) \leq U(f;T^*) \leq O(f;T^*) \leq O(f;T') \,.$$

qed.

9.2 Die Definition des Integrals

Wir bilden die Menge aller Untersummen:

$$\mathcal{U} := \{U(f;T) : T \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\ \},$$

und die Menge aller Obersummen:

$$\mathcal{O} := \{O(f;T) : T \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\ \},$$

also: $\mathcal{U}, \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}$ und wegen des obigen Satzes, liegt $\mathcal{U}$ links von $\mathcal{O}$. Daraus folgt

$$\begin{array}{ccc} \sup \mathcal{U} & \leq & \inf \mathcal{O} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \text{unteres Integral} & & \text{oberes Integral} \end{array}$$

Es gibt zwei Möglichkeiten:

1. $\sup \mathcal{U} = \inf \mathcal{O}$,
2. $\sup \mathcal{U} < \inf \mathcal{O}$.

Definition 9.2.2: *f sei auf $[a,b]$ beschränkt. f heißt Riemann-integrierbar auf $[a,b]$, falls* $\sup \mathcal{U} = \inf \mathcal{O}$. *Diese Zahl heißt dann „Integral von f über $[a,b]$“.*

$$\int_a^b f(x)dx := \sup \mathcal{U} = \inf \mathcal{O}.$$

Beispiel: Die Funktion $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ rational} \\ 1, & x \text{ irrational} \end{cases}$, $x \in [0,1]$, heißt Dirichlet-Funktion. $T = \{x_0, \ldots, x_n\}$ sei eine beliebige Zerlegung von $[0,1]$. Es gilt $m_i = 0$, $M_i = 1$, $\forall i$. Folglich

$$\begin{array}{lcl} U(f;T) & = 0\Delta x_1 + \cdots + 0\Delta x_n & = & 0, \\ O(f;T) & = \Delta x_1 + \cdots + \Delta x_n & = & 1, \end{array}$$

also $0 = U(f;T) < O(f;T) = 1$. $\diamondsuit$

Das Riemann'sche Integrabilitätskriterium

Satz 9.2.2: *Eine auf $[a,b]$ beschränkte Funktion ist genau dann über $[a,b]$ integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung T_ε von $[a,b]$ gibt, so daß*

$$O(f;T_\varepsilon) - U(f;T_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Beweis:

1. f sei integrierbar, d.h. $\sup \mathcal{U} = \inf \mathcal{O}$. Daher existieren für jedes $\varepsilon > 0$ Zerlegungen T_1, T_2 mit

   $$O(f;T_2) - U(f;T_1) < \varepsilon.$$

   Wir wählen $T_\varepsilon = T_1 \cup T_2$.

2. Ist $\inf \mathcal{O} > \sup \mathcal{U}$, dann ist die obige Ungleichung für $\varepsilon < \inf \mathcal{O} - \sup \mathcal{U}$ nicht zu erfüllen.

qed.

Beispiel: Sei $c > 0$ und $p \in [a,b]$. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq p, \\ c, & x = p \end{cases}$. $U(f;T) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = 0$, $O(f;T) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = c(x_k - x_{k-1})$, $O(f;T) - U(f;T) = c\Delta x_k < \varepsilon$ falls $\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{c}$.
Es gilt daher $\int\limits_a^b f(x)dx = 0.$ ♢

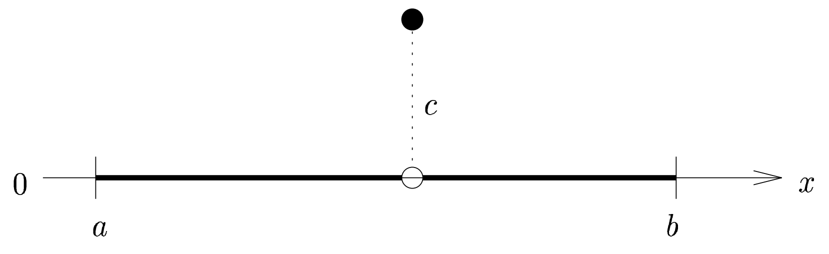

Abbildung 9.5:

Bemerkung:

1. Das gleiche Ergebnis gilt, wenn f in endlich vielen Punkten von 0 verschieden ist.

2. Ändert man eine integrierbare Funktion an endlich vielen Stellen ab, so bleibt das Integral unverändert.

♠

9.3 Die Integrierbarkeit von monotonen und stetigen Funktionen

Monotone Funktionen

Satz 9.3.3: *Ist f auf $[a,b]$ monoton, dann ist f integrierbar auf $[a,b]$.*

Beweis: f sei monoton wachsend. Dann gilt für $I_i = [x_{i-1}, x_i]$: $m_i = f(x_{i-1})$, $M_i = f(x_i)$. Sei $T_n = \{a, a+h, \cdots, a+nh = b\}$, $h = \frac{b-a}{n}$. Es folgt $O(f;T_n) - U(f;T_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i h - \sum\limits_{i=1}^{n} m_i h = h \sum\limits_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}) = h[f(b) - f(a)] < \varepsilon$, falls $h < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. qed.

Stetige Funktionen

Satz 9.3.4: *Eine auf $[a,b]$ stetige Funktion ist dort auch integrierbar.*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ $\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{b-a}$. $\exists \delta = \delta(\varepsilon_1)$, so daß $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon_1$, sobald $|x_1 - x_2| < \delta$, $x_1, x_2 \in [a,b]$. Wähle zu ε eine Unterteilung T mit $l(T) < \delta$. Dann gilt $O(f;T) - U(f;T) = \sum\limits_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - f(\eta_i)]\Delta x_i$, $\xi_i, \eta_i \in [a,b]$

Daraus folgt $O(f;T) - U(f;T) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon$. qed.

Für die Praxis genügt meist das folgende Resulat:

Satz 9.3.5: *Hat eine Funktion f auf $[a,b]$ endlich viele Sprungstellen und ist f sonst stetig, so ist f auf $[a,b]$ integrierbar.*

9.4 Das Integral als Grenzwert

Satz 9.4.6: *$f(x)$ sei integrierbar auf $[a,b]$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} U(f;T_n) = \lim_{n\to\infty} O(f;T_n) = \lim_{n\to\infty} R(f;T_n,Z_n)$$

für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge $\{T_n\}$ und für jede Wahl von Zwischenstellen $\{Z_n\}$.

Beweis: (für stetige Funktionen) Wir zeigen, daß für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge T_n die Folge $O(f;T_n) - U(f;T_n)$ eine Nullfolge bildet. Sei $\varepsilon > 0$. Zu diesem ε gibt es ein δ, so daß

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \text{ falls } |x_1 - x_2| < \delta, \quad x_1, x_2 \in [a,b]$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} l(T_n) = 0$ gibt es zu diesem δ einen Index N, so daß $l(T_n) < \delta$, $n \geq N$. Es sei m_n die Anzahl der Teilintervalle von T_n. Wegen

$$O(f;T_n) - U(f;T_n) = \sum_{i=1}^{m_n} (f(\xi_i) - f(\eta_i))\Delta x_i; \quad \xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

gilt für $n \geq N$

$$O(f:T_n) - U(f;T_n) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{m_n} \Delta x_i = \varepsilon.$$

qed.

Beispiel: $f(x) = \sin x$, $[a,b]$, $\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = h$, $\xi_i = x_{i-1}$; $R_n = h\sum\limits_{i=0}^{n-1} \sin(a+ih)$, $2\sin\frac{h}{2} R_n = h\sum\limits_{i=0}^{n-1} 2\sin(a+ih)\sin\dfrac{h}{2}$. Aus $2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$ folgt

$$2\sin(a+ih)\sin\frac{h}{2} = \cos\Big(a + (i-\frac{1}{2})h\Big) - \cos\Big(a + (i+\frac{1}{2})h\Big).$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} 2\sin\frac{h}{2} R_n &= h\Big(\cos(a - \frac{1}{2}h) - \cos(a + \frac{1}{2}h) + \cos(a + \frac{1}{2}h) - \cos(a + \frac{3}{2}h) \pm \cdots \\ &\quad + \cos(a - \frac{2n-3}{2}h) - \cos(b - \frac{1}{2}h)\Big) \\ &= h\Big(\cos(a - \frac{1}{2}h) - \cos(b - \frac{1}{2}h)\Big), \end{aligned}$$

und somit $R_n = \frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\Big(\cos(a-\frac{1}{2}h)-\cos(b-\frac{1}{2}h)\Big)$. Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} R_n = (\cos a - \cos b) = \int\limits_a^b \sin x dx.$$

Analog gilt $\int\limits_a^b \cos x dx = \sin b - \sin a.$ $\diamondsuit$

9.5 Aussagen über bestimmte Integrale

Definition 9.5.3: *Für $a > b$ definiert man:*

$$\int\limits_a^b f(x)dx := -\int\limits_b^a f(x)dx \text{ und } \int\limits_a^a f(x)dx := 0.$$

Gleichungen

1. $\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},$

2. $\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx.$

Ungleichungen

1. Falls $f(x)$, $g(x)$ auf $[a, b]$ integrierbar sind und $f(x) \geq g(x)$, so folgt
$$\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx.$$

2. Ist $f(x)$ auf $[a, b]$ integrierbar, so ist auch $|f(x)|$ integrierbar und es gilt
$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

Folgerungen

1. Gilt $|f(x)| \leq M$ auf $[a,b]$, so folgt

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq M(b-a).$$

2. Gilt $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ auf $[a,b]$, so gilt

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \right| < \varepsilon(b-a).$$

3. Wie wir bereits wissen, gilt für $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, die Ungleichung

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Daraus folgt

Satz 9.5.7: *(1. Mittelwertsatz der Integralrechnung) Ist $f(x)$ stetig auf $[a,b]$, so gibt es ein $\xi \in [a,b]$, so daß*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Beweis: Sei $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$. Dann gilt

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Aufgrund des Zwischenwertsatzes gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

qed.

Satz 9.5.8: *Sind die Funktionen f, g integrierbar auf $[a,b]$ so ist auch die Funktion $f \cdot g$ dort integrierbar.*

Satz 9.5.9: *(2.Mittelwertsatz der Integralrechnung) $f(x)$ sei stetig auf $[a,b]$ und $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sei integrierbar, $g(x)\geq 0$, $x\in[a,b]$, $\int\limits_a^b g(x)dx>0$. Dann existiert $\xi\in[a,b]$, so daß*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)dx.$$

Beweis: Aus $m\leq f(x)\leq M$ folgt

$$\begin{array}{ccccc} mg(x) & \leq & f(x)g(x) & \leq & Mg(x) \\ m\int\limits_a^b g(x)dx & \leq & \int\limits_a^b f(x)g(x)dx & \leq & M\int\limits_a^b g(x)dx, \\ m & \leq & \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} & \leq & M. \end{array}$$

Jetzt liefert wieder der Zwischenwertsatz das Resultat. qed.

9.6 Das unbestimmte Integral

Definition 9.6.4: *$f:I\to\mathbb{R}$ sei stetig und $a\in I$. Dann heißt die Funktion*

$$F(x)=\int\limits_a^x f(u)du,\quad F:I\to\mathbb{R}$$

Integral von f als Funktion der oberen Grenze.

Satz 9.6.10: *(1. Hauptsatz der Differential-Integralrechnung) Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Für alle $x\in[a,b]$ ist die Funktion $F(x)=\int\limits_a^x f(u)du$ stetig differenzierbar und*

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(u)du=f(x).$$

Beweis:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int\limits_a^{x+h} f(s)ds-\int\limits_a^x f(s)ds\right)$$

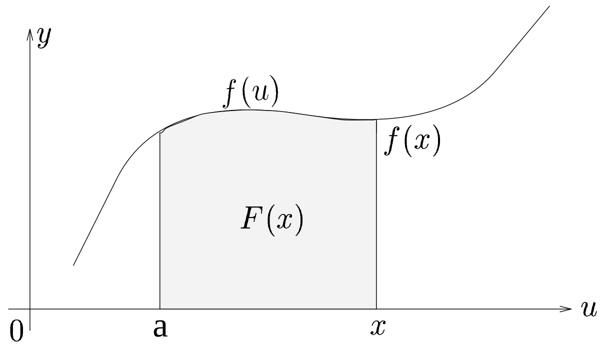

Abbildung 9.6: Unbestimmtes Integral

$$= \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} f(s)ds = f(x+\vartheta h), \quad 0 \le \vartheta \le 1.$$

qed.

Bemerkung: Differentiation ist die inverse Operation zur Integration. ♠

Definition 9.6.5: *Ist $f(x)$ stetig auf I, dann nennt man jede auf I stetig differenzierbare Funktion $G(x)$ mit*

$$G'(x) = f(x)$$

eine Stammfunktion *von $f(x)$.*

Bemerkung: Die Existenz solcher Stammfunktionen ist aufgrund des obigen Satzes gesichert. Neben $G(x)$ ist auch jede Funktion $G(x)+C$ mit einer beliebigen Konstanten C Stammfunktion. ♠

Satz 9.6.11: *Sind $F(x)$ und $G(x)$ auf einem Intervall I zwei Stammfunktionen einer Funktion $f(x)$, so ist*

$$F(x) - G(x) \equiv C.$$

Beweis: Sei $\varphi(x) = F(x) - G(x)$. Differenzieren ergibt $\varphi'(x) = F'(x) - G' = f(x) - f(x) \equiv 0$. Daher ist $\varphi(x)$ konstant auf I . qed.

Definition 9.6.6: *Die Gesamtheit aller Stammfunktionen von $f(x)$ nennt man* das unbestimmte Integral von *$f(x)$ und schreibt dafür*

$$\int f(x)dx \quad oder \quad \int f dx.$$

Beispiel: $\int \sin x dx = -\cos x + C$, $\int \cos x dx = \sin x + C$. ◊

Satz 9.6.12: *(2.Hauptsatz der Differential-Integralrechnung) Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und F sei eine Stammfunktion von f. Dann gilt für $a, b \in I$*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: F(x)|_a^b.$$

Beweis: Es sei eine Stammfunktion $F(x)$ bekannt. Dann ist $I(a, x) = \int_a^x f(u)du$ ebenfalls Stammfunktion, also

$$I(a, x) = F(x) + C.$$

Für $x = a$ wird dies zu $C = -F(a)$ und folglich

$$I(a, x) = F(x) - F(a),$$

insbesondere

$$I(a, b) = F(b) - F(a).$$

qed.

9.7 Integrationsformeln

Gewinnung von Integrationsformeln aus Differentiationsformeln

Beispiel: Die Potenzfunktion: $F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\alpha \neq 1$, ist eine Stammfunktion von $x^\alpha : F' = \frac{(\alpha+1)x^\alpha}{\alpha+1} = x^\alpha$, daher

$$\begin{aligned} \int x^\alpha dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1, \\ \int_a^b x^\alpha dx &= F(b) - F(a) = \frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}), \quad \alpha \neq 1. \end{aligned}$$

◊

Beispiel: Die trigonometrischen Funktionen:

1. $F(x) = \sin x$ und $F(x) = \cos x$ haben wir bereits behandelt.
2. $F(x) = \tan x$, $F' = \frac{1}{\cos^2 x}$,
3. $F(x) = \cot x$, $F' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Daraus folgen die Integrationsformeln

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C,$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C.$$

$\diamondsuit$

Beispiel: Die zyklometrischen Funktionen:

1. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, für $|x| < 1$,
2. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, für $|x| < 1$,
3. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$,
4. $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Das liefert die Integrationsformeln

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$$

$\diamondsuit$

Beispiel: Die Exponentialfunktion:

1. $(e^x)' = e^x$,
2. $(a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a a^x$.

Die Integrationsformeln sind daher

$$\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$\diamondsuit$

Beispiel: Die Hyperbelfunktionen:

1. $(\sinh x)' = \cosh x$,
2. $(\cosh x)' = \sinh x$,
3. $(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$,
4. $(\coth x)' = \frac{1}{\sinh^2 x}$.

Daraus ergeben sich die Integrationsformeln

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C, \qquad \int \sinh x dx = \cosh x + C,$$
$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = \coth x + C.$$

$\diamondsuit$

Beispiel: Der natürliche Logarithmus: $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$, woraus folgt

$$\int \frac{1}{x} = \ln |x| + C.$$

$\diamondsuit$

Beispiel: Die Areafunktionen:

1. $(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$,
2. $(\operatorname{arcosh} x)' = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$,
3. $(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1$.

Daraus folgen die Integrationsformeln

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsinh} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C,$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh} x + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C, \quad |x| > 1,$$
$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C, \quad x \neq 1, -1.$$

$\diamondsuit$

Partielle Integration

Aus
$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$
folgt
$$u(x)v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u'(x)v(x)dx,$$
was man schreibt als
$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx,$$
und als unbestimmtes Integral
$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx + C.$$

Beispiel: $\int x \sin x dx$ soll berechnet werden.
1. Möglichkeit: $x = u$, $\sin x = v'$:
$$\begin{aligned} I &= \underbrace{x}_{u}\underbrace{(-\cos x)}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'}\underbrace{(-\cos x)}_{v}dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x dx + C = -x\cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$
2. Möglichkeit: $x = v'$, $\sin x = u$:
$$I = \underbrace{\sin x}_{u}\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v} - \int \underbrace{\cos x}_{u'}\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v}dx + C.$$
Diese Vorgangsweise bietet keine Erleichterung! ♢

Anwendungen der partiellen Integration

1) Integrale der Form $\int x^n f'(x)dx$, $n \in \mathbb{N}$:
$$\int \underbrace{x^n}_{u}\underbrace{f'(x)}_{v'} = \underbrace{x^n}_{u}\underbrace{f(x)}_{v} - n\int \underbrace{x^{n-1}}_{u'}\underbrace{f(x)}_{v}dx.$$

Beispiel: $\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$
♢

2) *Rekursionsformeln* für unbestimmte Integrale:

Beispiel:

$$\begin{aligned} I_n &:= \int \sin^n x dx \quad = \int \sin^{n-1} x \sin x dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2}(1 - \sin^2 x) dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} (1 + n - 1) I_n &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2} \quad \text{und} \\ I_n &= -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \end{aligned}$$

Durch Fortführung dieses Verfahrens erhalten wir die folgenden *Schlußintegrale*:

n gerade: $I_0 = \int dx = x + C.$
n ungerade: $I_1 = \int \sin x dx = -\cos x + C.$

◊

Beispiel:

$$I_3 = \int \sin^3 x \, dx = -\frac{1}{3} \sin^2 x \cos x + \frac{2}{3} I_1 = -\frac{1}{3} \sin^2 x \cos x - \frac{2}{3} \cos x + C.$$

◊

Variablensubstitution

Es sei F eine Stammfunktion von f: $F'(u) = f(u)$. Betrachte $H(x) = F(g(x))$. Mit Hilfe der Kettenregel können wir differenzieren:

$$H'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

oder

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C.$$

Satz 9.7.13: *(Substitutionsregel) Es sei $g : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f : g(I) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt mit einer Stammfunktion $F(u) = \int f(u)du$, daß*

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C.$$

Für das bestimmte Integral gilt

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = F(g(b)) - F(g(a)).$$

(Beim bestimmten Integral müssen die Integrationsgrenzen mitsubstituiert werden.)

Beispiel: $\int \sin^2 x \cos x dx = \int (\sin x)^2 (\sin x)' dx$; $f(u) = u^2$, $g(x) = \sin x$. Damit erhalten wir die Stammfinktion $F(u) = \frac{u^3}{3}$ und $\int \sin^2 \cos x dx = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$. $\diamondsuit$

Beispiel: $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\frac{1}{2}(1+x^2)'}{\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)'}{\sqrt{1+x^2}}dx$; $f(u) = u^{-\frac{1}{2}}$, $g(x) = 1 + x^2$. Mit der Stammfunktion $F(u) = 2u^{\frac{1}{2}}$ folgt

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}2\sqrt{1+x^2} + C = \sqrt{1+x^2} + C.$$

$\diamondsuit$

Merkregel: Ist F Stammfunktion von f, so gilt

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,$$

denn

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)(ax+b)'dx.$$

Beispiel: $\int \sin axdx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$. $\diamondsuit$

Beispiel:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \int f(g(x))g'dx$$

mit $f(u) = \frac{1}{u^2+1}$, $g(x) = x + 2$. Aus $\int f(u)du = \arctan u + C$ folgt

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \arctan(x+2) + C.$$

Für das folgende bestimmte Integral gilt:

$$\int_{-1}^{-2+\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{du}{u^2+1} = \arctan\sqrt{3} - \arctan 1.$$

$\diamondsuit$

Die Umformulierung der Substitutionsregel

Gesucht ist $F(x) = \int f(x)dx$. Wir betrachten stattdessen für eine differenzierbare Funktion $g(u)$ das Integral (Substitution $x = g(u)$)

$$\int f(g(u))g'(u)du$$

und nehmen an, daß eine Stammfunktion $H(u)$ des Integranden bekannt ist,

$$\int f(g(u))g'(u)du = H(u).$$

Nun wissen wir aber, daß

$$\int f(g(u))g'(u)du = F(g(u)) + C,$$

also $F(g(u)) = H(u) + C$. Mit $x = g(u)$ erhalten wir

$$F(x) = H(g^{-1}(x)) + C\,.$$

Vorgangsweise: Zur Bestimmung der unbestimmten Integrals $\int f(x)dx$ substituiert man $x = g(u)$ mit $g(u)$ stetig differenzierbar und invertierbar, setzt $dx = g'(u)du$ und bestimmt das Integral

$$\int f(g(u))g'(u)du = H(u).$$

Dann gilt (rücksubstituieren!)

$$\int f(x)dx = H(g^{-1}(x)) + C.$$

Für das bestimmte Integral gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))g'(u)du = H(g^{-1}(b)) - H(g^{-1}(a)).$$

Beispiel: Gesucht ist $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$, $|x| < a$, $a > 0$. Die Substitution $x = g(u) = a\sin u$, $dx = a\cos u\, du$ führt auf

$$\begin{aligned}\int \frac{a^2\sin^2 u a\cos u\, du}{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 u}} &= \int \frac{a^3\cos u \sin^2 u}{a\cos u}du = a^2 \int \sin^2 u\, du \\ &= \frac{a^2}{2}(u - \sin u \cos u) + C.\end{aligned}$$

Durch Rücksubstituieren erhält man

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \frac{a^2}{2}\Big(\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{a}\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}\Big) + C.$$

Für das bestimmte Integral gilt

$$\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}dx = 2\int\limits_0^{\arcsin\frac{1}{2}} \sin^2 u\,du = (u-\sin u\cos u)|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

◊

9.8 Besondere Integrale

Zwei Integraltypen

Das Integral $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ mit $a \neq 0$ kann immer mittels quadratischer Erweiterung und einfachen Substitutionen berechnet werden.

Beispiel:

$$I = \int \frac{dx}{4x^2-4x+6} = \int \frac{dx}{(2x-1)^2+5} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)^2+1}.$$

Die Substitution $u = \dfrac{2x-1}{\sqrt{5}}$ ergibt

$$I = \frac{1}{2\sqrt{5}}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\arctan u + C = \frac{1}{2\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + C\ .$$

◊

Im allgemeinen Fall transformiert man das Integral $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $a \neq 0$, mittels quadratische Erweiterung und einer linearen Variablensubstitution in Abhängigkeit von den auftretenden Vorzeichen auf eines der drei Integrale:

$$I_1 = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C,$$

$$I_1 = \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + C,$$

$$I_1 = \int \frac{du}{1-u^2} = \operatorname{artanh} u + C \ .$$

Beispiel:

$$I = \int \frac{dx}{4x^2-4x-4} = \int \frac{dx}{(2x-1)^2-5} = -\frac{1}{5}\int \frac{dx}{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)^2}.$$

Die Substitution $u = \dfrac{2x-1}{\sqrt{5}}$ ergibt

$$I = -\frac{1}{2\sqrt{5}}\int \frac{du}{1-u^2} = -\frac{1}{2\sqrt{5}}\operatorname{artanh} u + C = -\frac{1}{2\sqrt{5}}\operatorname{artanh}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + C \ .$$

$\diamondsuit$

Beim Integral

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad a \neq 0$$

geht man ähnlich vor. Quadratische Erweiterung und eine lineare Variablensubstitution führt in Abhängigkeit von den auftretenden Vorzeichen auf eines der vier Integrale:

$$I_2 = \int \frac{du}{u} = \ln u + C,$$

$$I_2 = \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{arsinh} u + C,$$

$$I_2 = \int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \operatorname{arcosh} u + C,$$

$$I_2 = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C.$$

Integrale von rationalen Funktionen

Jede rationale Funktion $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ kann unter Verwendung ihrer Partialbruchzerlegung integriert werden. Dabei genügt es die Stammfunktionen der einzelnen Summanden, die in der Partialbruchzerlegung auftreten, zu kennen. Dabei treten zwei Typen von Integralen auf:

(1) $$\int \frac{A}{(x-\alpha)^j}dx, \ j \in \mathbb{N}$$

und

$$(2) \qquad \int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^j},\ j \in \mathbb{N}.$$

Die Integrale vom Typ (1) können unmittelbar angegeben werden:

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^j}dx = \begin{cases} \frac{A}{1-j}(x-\alpha)^{1-j}, & j>1 \\ \\ \ln|x-\alpha|, & j=1 \end{cases}$$

Die Integrale vom Typ (2) werden folgendermaßen berechnet. Für $B \neq 0$ zerlegt man das Integral in

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^j}dx = \frac{B}{2}\int \frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^j}dx + E\int \frac{dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^j},$$

mit der Konstante $E = C - \frac{B\beta}{2}$. Im Fall $B=0$ entfällt dieser Schritt.

Das Integral

$$\int \frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^j}dx$$

kann nun mittels der Substitution

$$u = x^2+\beta x+\gamma$$

berechnet werden. Es folgt

$$\int \frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^j}dx = \begin{cases} \frac{1}{1-j}(x^2+\beta x+\gamma)^{1-j}, & j>1 \\ \\ \ln|x^2+\beta x+\gamma|, & j=1 \end{cases}$$

Es bleibt die Berechnung des Integrals $I_j := \int \frac{dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^j}$, $j \in \mathbb{N}$. Das quadratische Polynom $x^2+\beta x+\gamma$ hat keine reellen Nullstellen. Warum ? Daher kann man I_j mittels quadratischer Erweiterung und einer linearen Substitution immer in die Form

$$I_j = \int \frac{1}{(1+u^2)^j}du, \quad j \geq 0$$

bringen. Für I_1 gilt natürlich

$$I_1 = \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + C\ .$$

Für I_j, $j>1$ kann man nun eine Rekursion herleiten. Aus

$$\int \frac{1}{(1+u^2)^j}du = \int \frac{1+u^2-u^2}{(1+u^2)^j}du = I_{j-1} - \int u\,\frac{u}{(1+u^2)^j}du$$

folgt mittels partieller Integration die Rekursionsformel

$$I_j = \frac{3-2j}{2-2j} I_{j-1} - \frac{u}{(2-2j)(1+u^2)^{j-1}}, \quad j > 1 .$$

In gewissen Fällen kann die Integration komplizierterer Funktionen auf die Integration einer rationalen Funktion zurückgeführt werden. Die wichtigsten Regeln dafür werden im folgenden zusammengefaßt.

Merkregelsammlung

$R(x)$ sei eine rationale Funktion in x.

1. $\int R\Big(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Big)dx$, Substitution $t = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ führt auf eine rationale Funktion in t.
2. $\int R(e^{ax})dx$, Substitution $t = e^{ax}$ führt auf eine rationale Funktion in t.
3. $\int R(\sin x, \cos x)dx$, Substitution $t = \tan \frac{x}{2}$ führt auf eine rationale Funktion in t.
4. $\int R(x, \sqrt{1+x^2})dx$, Substitution $x = \sinh t$ führt auf (2).
5. $\int R(x, \sqrt{x^2-1})dx$, Substitution $x = \cosh t$ führt auf (2).
6. $\int R(x, \sqrt{1-x^2})dx$, Substitution $x = \cos t$ oder $x = \sin t$ führt auf (3).
7. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$, Quadratische Erweiterung führt auf (4), (5) oder (6).
8. $\int P(x)\left\{\begin{matrix} e^{ax} \\ \sin ax \\ \cos ax \end{matrix}\right\}dx$, mit einem Polynom $P(\lambda)$; Partielle Integration mit $u(x) = P(x)$ und $v'(x) = e^{ax}$, $v'(x) = \sin ax$ oder $v'(x) = \cos ax$.

Beispiel: Im Detail geht man im Fall (3): $\int R(\sin x, \cos x)dx$ folgendermaßen vor.

$$t = \tan\frac{x}{2}, \quad x = 2\arctan t, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2},$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}(1-\tan^2\frac{x}{2}) = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} .$$

Damit läßt sich $\int R(\sin x, \cos x)dx$ in $\int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2}{1+t^2}dt$ überführen. $\diamondsuit$

9.9 Uneigentliche Integrale

Wir haben bisher das Integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ unter folgenden Voraussetzungen definiert:

1. $-\infty < a < b < \infty$,
2. $|f(x)| \le C$, $x \in [a,b]$.

Im folgenden beschäftigen wir uns mit Integralen, die diese Bedingungen nicht erfüllen.

Unbeschränktes Integrationsintervall

Definition 9.9.7: $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ *heißt* lokal integrierbar *in* $[a,\infty)$, *wenn* $\int\limits_a^x f(t)dt$ *existiert für alle* $x \in [a,\infty)$.

Auf dem Intervall $(-\infty, a]$ gilt eine analoge Definition.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist lokal integrierbar $[0,\infty)$, denn

$$I(x) = \int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x - \arctan 0 = \arctan x.$$

Der Grenzübergang $x \to \infty$ liefert

$$I := \lim_{x\to\infty} I(x) = \lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

und wir erhalten daher mit

$$\frac{\pi}{2} =: \int\limits_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}$$

eine sinnvolle Definition von $\int\limits_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}$. ◊

Beispiel: Für die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x}$ erhalten wir

$$I(x) = \int\limits_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x).$$

Da der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} I(x)$ nicht existiert, ist $\int\limits_0^\infty \frac{dt}{1+t}$ nicht definiert. ♢

Definition 9.9.8: *f sei lokal integrierbar auf $[a,\infty)$. Existiert $\lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_a^x f(t)dt$, so heißt f über $[a,\infty)$* uneigentlich integrierbar. *Den Grenzwert bezeichnet man mit $\int\limits_a^\infty f(t)dt$ und nennt ihn das* uneigentliche Integral *von f über $[a,\infty)$. Existiert der Grenzwert nicht, so sagt man, das uneigentliche Integral* divergiert. *(Analoge Definition für $(-\infty,b]$).*

Beispiel: Bestimmung des uneigentlichen Integrals $\int\limits_a^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ mit der unteren Integrationsgrenze $a>0$:

$$\int\limits_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \frac{x^{1-\alpha}-a^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1, \\ \ln x - \ln a, & \alpha = 1 \end{cases}.$$

Für $\alpha > 1$ erhalten wir

$$\lim_{x\to\infty} \int\limits_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

Für $\alpha \leq 1$ divergiert das uneigentliche Integral. ♢

Bemerkung: Allgemein gilt: $\int\limits_a^\infty \frac{dt}{(t-c)^\alpha}$ mit $a>c$ existiert für $\alpha>1$, nicht aber für $\alpha \leq 1$. ♠

Anwendung: Gravitationskraft. $F(x) = \gamma\frac{mM}{x^2}$,

$$W(d) = -\int\limits_d^\infty F(x)dx = -\gamma mM \int\limits_d^\infty \frac{1}{x^2} = -\frac{\gamma mM}{d}.$$

Beispiel: Konvergiert $\int\limits_0^\infty \cos t\, dt$?

Es gilt $\int\limits_0^x \cos t\, dt = \sin x$, aber $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ existiert nicht. Also existiert $\int\limits_0^\infty \cos t\, dt$ nicht! ♢

Satz 9.9.14: *$f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ sei lokal integrierbar. f ist genau dann über $[a,\infty)$*

integrierbar, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ *eine Zahl* $A = A(\varepsilon)$ *existiert, so daß*

$$\Big|\int_\alpha^\beta f(t)dt\Big| < \varepsilon \textit{ für } \alpha, \beta > A.$$

Beweis: Wir zeigen zuerst, daß die Bedingung hinreichend ist: Es sei $\{x_\nu\}$ eine bestimmt divergente Folge, d.h.: $a < x_\nu < x_{\nu+1}$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu = \infty$. Wir betrachten die Folge

$$c_\nu = \int_a^{x_\nu} f(t)dt.$$

Diese konvergiert genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index $N = N(\varepsilon)$ existiert, so daß

$$|c_n - c_m| < \varepsilon \text{ für } n, m > N.$$

Nun ist laut Voraussetzung

$$|c_n - c_m| = \Big|\int_{x_m}^{x_n} f(t)dt\Big| < \varepsilon,$$

wenn N so gewählt wird, daß $x_N > A(\varepsilon)$. Der Grenzwert hängt nicht von der Folge $\{x_\nu\}$ ab: Es seien $\{x'_\nu\}$, $\{x''_\nu\}$ zwei bestimmt divergente Folgen und

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_a^{x'_\nu} f(t)dt = I', \qquad \lim_{\nu\to\infty}\int_a^{x''_\nu} f(t)dt = I''.$$

Dann gilt

$$I'' - I' = \lim_{\nu\to\infty}\int_{x'_\nu}^{x''_\nu} f(t)dt,$$

und wir zeigen, daß der Grenzwert null ist. Denn für $\nu \geq N$ mit x'_N, $x''_N > A(\varepsilon)$ gilt ja

$$\Big|\int_{x'_\nu}^{x''_\nu} f(t)dt\Big| < \varepsilon.$$

Nun zeigen wir, daß die Bedingung notwendig ist: Würde die Bedingung nicht gelten, dann gäbe es eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ und eine bestimmt divergente Folge $\{x_\nu\}$, so daß

$$\Big|\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} f(t)dt\Big| > \varepsilon_0, \text{ also } |c_{\nu+1} - c_\nu| > \varepsilon_0, \quad \forall\nu,$$

und folglich divergiert $\{c_\nu\}$. qed.

Beispiel: Existiert $\int\limits_0^\infty \sin te^{-t}dt$?

$$\Big|\int\limits_\alpha^\beta \sin te^{-t}dt\Big| \le \int\limits_\alpha^\beta e^{-t}dt = e^{-\alpha} - e^{-\beta} < e^{-\alpha}, \text{ falls } \beta > \alpha.$$

Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben, Wähle A, so daß $e^{-A} = \varepsilon$, also $A = -\ln\varepsilon$, dann gilt

$$\Big|\int\limits_\alpha^\beta \sin te^{-t}dt\Big| < e^{-\alpha} < e^{-A} = \varepsilon \text{ für } \alpha, \beta > A.$$

Also existiert das uneigentliche Integral. $\diamondsuit$

Für die Praxis besonders wichtig ist

Das Vergleichskriterium

Satz 9.9.15: *Es seien f, g zwei auf $[a,\infty)$ definierte, lokal integrierbare Funktionen.*

1. *Ist $|f(t)| \le g(t)$, $t \in [a,\infty)$ und konvergiert $\int\limits_a^\infty g(t)dt$, dann konvergiert auch $\int\limits_a^\infty f(t)dt$, und*

$$\Big|\int\limits_a^\infty f(t)dt\Big| \le \int\limits_a^\infty |f(t)|dt \le \int\limits_a^\infty g(t)dt.$$

2. *Gilt $0 \le g(t) \le f(t)$, $t \in (a,\infty)$ und divergiert $\int\limits_a^\infty g(t)dt$, so divergiert auch $\int\limits_a^\infty f(t)dt$.*

Beweis:

1. Anwendung der obigen Satzes:

$$\Big|\int\limits_\alpha^\beta f(t)dt\Big| \le \int\limits_\alpha^\beta |f(t)|dt \le \int\limits_\alpha^\beta g(t)dt = \Big|\int\limits_\alpha^\beta g(t)dt\Big| < \varepsilon \text{ für } \alpha, \beta \ge A(\varepsilon).$$

Also existiert $\int\limits_a^\infty f(t)dt$.

2. Für alle $x \geq a$ gilt dann

$$\int\limits_a^x f(t)dt \geq \int\limits_a^x g(t)dt.$$

Divergiert also $\int\limits_a^\infty g(t)dt$, so divergiert auch $\int\limits_a^\infty f(t)dt$.

Damit ist der Beweis erbracht. qed.

Die wichtigste Klasse von *Vergleichfunktionen*:

$$g(t) = \frac{M}{(t-c)^\alpha}, \quad a > c.$$

Beispiel: Die Existenz von $\int\limits_a^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$, $a > 0$ soll überprüft werden.

$\alpha > 1$: $|\frac{\sin t}{t^\alpha}| \leq \frac{1}{t^\alpha}$, also existiert $\int\limits_a^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha}$.

$0 < \alpha \leq 1$: Mittels partieller Integration erhalten wir

$$\int\limits_a^x \sin t \frac{1}{t^\alpha} dt = -\cos t \frac{1}{t^\alpha}\Big|_a^x + \alpha \int\limits_a^x \cos t \frac{1}{t^{\alpha+1}} dt.$$

Die beiden Anteile konvergieren für $x \to \infty$, daher existiert $\int_a^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$. ♢

Beispiel: Existiert $\int\limits_0^\infty \frac{t}{t^2+2t+5} dt$?

Für $t \geq 5$ gilt $t + 2 + \frac{5}{t} \leq t + 2 + 1$, also

$$\frac{t}{t^2+2t+5} = \frac{1}{t+2+\frac{5}{t}} \geq \frac{1}{t+2+1} = \frac{1}{t+3}, \quad t \geq 5.$$

Da $\int\limits_5^\infty \frac{dt}{t+3}$ divergiert, divergiert auch $\int\limits_5^\infty \frac{t}{t^2+2t+5} dt$. ♢

Integrationsintervall $(-\infty, \infty)$

Definition 9.9.9: *Gibt es ein* $c \in \mathbb{R}$, *so daß die uneigentlichen Integrale*

$$\int_{-\infty}^{c} f(t)dt \text{ und } \int_{c}^{\infty} f(t)dt$$

konvergieren, dann konvergiert *auch* $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ *und man setzt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{c} f(t)dt + \int_{c}^{\infty} f(t)dt,$$

andernfalls divergiert $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt.$

Man kann auch schreiben:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \lim_{y \to -\infty} \int_{y}^{c} f(t)dt + \lim_{x \to \infty} \int_{c}^{x} f(t)dt,$$

wobei wichtig ist, daß die Integrale unabhängig von einander konvergieren müssen.

Beispiel: $f(x) = \frac{t}{1+t^2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{1+t^2}dt = \lim_{y \to -\infty} \int_{y}^{c} \frac{t}{1+t^2}dt + \lim_{x \to \infty} \int_{c}^{x} \frac{t}{1+t^2}dt$$

konvergiert nicht. Jedoch gilt

$$\lim_{z \to \infty} \Big(\int_{-z}^{z} \frac{t}{1+t^2}dt \Big) = 0.$$

Man nennt den Grenzwert (falls es existiert)

$$\lim_{z \to \infty} \Big(\int_{-z}^{z} f(t)dt \Big) =: HW \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$

den *Cauchy'schen Hauptwert* des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt.$ ◊

Unbeschränkter Integrand

Wir betrachten als Beispiel $\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$.

$$I(x) = \int\limits_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} \frac{1-x^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \\ -\ln x, & \alpha = 1 \end{cases}.$$

Für $\alpha < 1$ gilt $\lim\limits_{x\to 0+} I(x) = \frac{1}{1-\alpha}$, d.h. $\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ konvergiert. Für $\alpha = 1$ gilt $\lim\limits_{x\to 0+} I(x) = \lim\limits_{x\to 0+}(-\ln x) = \infty$. Für $\alpha > 1$ ebenso.

Definition 9.9.10: *$f : (a,b] \to \mathbb{R}$ heißt* lokal integrierbar *in $(a,b]$, wenn $\int\limits_x^b f(t)dt$ existiert für alle $x \in (a,b]$.*

Auf dem Intervall $[a,b)$ gilt eine analoge Definition.

Definition 9.9.11: *f sei lokal integrierbar über $(a,b]$ und unbeschränkt in a. Existiert $\lim\limits_{x\to a+} \int\limits_x^b f(t)dt$, so heißt f über $(a,b]$* uneigentlich integrierbar*. Den Grenzwert bezeichnet man mit $\int\limits_a^b f(t)dt$ und nennt ihn das* uneigentliche Integral *von f über $(a,b]$.*

Vergleichskriterium

Satz 9.9.16: *Es seien f, g lokal integrierbar über $(a,b]$.*

1. *Ist $|f(t)| \leq g(t)$, $t \in (a,b]$ und konvergiert $\int\limits_a^b g(t)dt$, so konvergiert auch $\int\limits_a^b f(t)dt$ und es gilt*

$$\left|\int\limits_a^b f(t)dt\right| \leq \int\limits_a^b |f(t)|dt \leq \int\limits_a^b g(t)dt.$$

2. Gilt $0 \leq g(t) \leq f(t)$, $t \in (a,b]$ *und divergiert* $\int\limits_a^b g(t)dt$, *so divergiert auch* $\int\limits_a^b f(t)dt$.

Beweis: Analog zum Vergleichskriterium für Integrale auf unbeschränkten Intervallen. qed.

Unendlichkeitsstelle im Intervallinneren

Definition 9.9.12: $f : [a,b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ *sei lokal integrierbar über* $[a,c)$ *und* $(c,b]$ *und unbeschränkt im Punkt c. Konvergieren* $\int\limits_a^c f(t)dt$ *und* $\int\limits_c^b f(t)dt$, *so* konvergiert $\int\limits_a^b f(t)dt$, *und man setzt*

$$\int\limits_a^b f(t)dt := \int\limits_a^c f(t)dt + \int\limits_c^b f(t)dt.$$

Oft schreibt man

$$\int\limits_a^b f(t)dt = \lim_{x \to c-} \int\limits_a^x f(t)dt + \lim_{y \to c+} \int\limits_y^b f(t)dt.$$

Wichtig ist, daß *die beiden Grenzwerte unabhängig von einander existieren.* Beachtet man dies nicht, indem man den *Cauchyschen Hauptwert*

$$HW \int\limits_a^b f(t)dt := \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(t)dt + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(t)dt \Big)$$

bildet, so kann man Konvergenz erhalten, auch wenn $\int\limits_a^b f(t)dt$ divergiert.

Beispiel: $\int\limits_{-2}^1 \frac{dt}{t}$:

$$\int\limits_{-2}^{-\varepsilon} \frac{dt}{t} + \int\limits_{\varepsilon}^1 \frac{dt}{t} = \ln\varepsilon - \ln 2 + \ln 1 - \ln\varepsilon = \ln 1 - \ln 2 = \ln\frac{1}{2}.$$

Also ist der Cauchy'sche Hauptwert $\ln\frac{1}{2}$, $HW\int\limits_{-2}^{1}\frac{dt}{t}=\ln\frac{1}{2}$, aber $\int\limits_{-2}^{1}\frac{dt}{t}$ divergiert.

◊

Man nennt Integrale mit einem unbeschränkten Integranden *uneigentliche Integrale 1. Art* und Integrale auf einem unbeschränkten Intervall *uneigentliche Integrale 2. Art.*

Kombination von unbeschränktem Integranden und unbeschränktem Intervall

Beispiel: Konvergiert $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$?

Wähle $c>0$ und betrachte getrennt $\int\limits_{0}^{c}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$ und $\int\limits_{c}^{\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$, wobei das erste Integral sicher existiert. Die Existenz des zweiten kann mit Hilfe partieller Integration gezeigt werden:

$$\int\limits_{c}^{x}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt=\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\Big|_{c}^{x}+\frac{1}{2}\int\limits_{c}^{x}\frac{\sin t}{\sqrt{t^3}}dt,$$

konvergiert für $x\to\infty$. Also existiert $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt.$ ◊

Kapitel 10

Reihen mit konstanten Gliedern

10.1 Einführung

Wir gehen von einer beliebigen Folge $\{a_n\}$ aus und konstruieren mittels dieser eine neue Folge $\{s_n\}$:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\,. \end{aligned}$$

Man bezeichnet s_n als die n - te *Partialsumme der Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Falls die Folge der Partialsummen konvergiert, so heißt

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

die *Summe der Reihe*. Über die Definition der Partialsummen gelingt es also, eine „Summation“ von unendlich vielen Summanden sinnvoll zu erklären. Eine nicht konvergente Reihe heißt *divergent*.

Beispiel: Die geometrische Reihe: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + \cdots + q^n + \ldots$.
Für $q \neq 1$ gilt bekanntlich

$$s_n = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Für $|q| < 1$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, und damit $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-q}$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \text{ für } |q| < 1.$$

Für $|q| \geq 1$ ist die geometrische Reihe divergent, für $q > 1$ bestimmt divergent (oder uneigentlich konvergent gegen ∞), denn

$$s_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}, \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \infty, \quad q > 1.$$

Man schreibt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \infty$ für $q \geq 1$. ♢

Beispiel: Die harmonische Reihe: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{n} + \cdots$.
$s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ wächst streng monoton, da

$$s_{n+1} - s_n = \frac{1}{n+1} > 0.$$

Es gilt $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k} = \infty$.

Beweis: Zum Beweis konstruieren wir eine divergente Teilfolge: $\{s_n : n = 2^m\}$.

$$\begin{aligned}
\text{Für } m = 1 \quad \text{gilt} \quad & s_2 = 1 + \frac{1}{2}, \\
m = 2 \quad & s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} \geq 2 = 1 + \frac{2}{2}, \\
m = 3 \quad & s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} \geq 1 + \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
s_{2^m} &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^m}} \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} \\
&= 1 + \frac{m}{2}
\end{aligned}$$

Daher ist die Folge $\{s_{2^m}\}$ nicht beschränkt und das Resultat folgt. qed.

$\diamondsuit$

Beispiel: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$.
$\{s_n\}$ ist monoton wachsend. Wir zeigen, daß $\{s_n\}$ nach oben beschränkt ist:

Beweis:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= 1 + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \cdots + \frac{1}{n.n} + \frac{1}{(n+1)(n+1)}, \\ &\leq 1 + \frac{1}{2.1} + \frac{1}{3.2} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{(n+1)n}. \end{aligned}$$

Nun ist $\frac{1}{(k+1)k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, also

$$\begin{aligned} s_{n+1} &\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 2 - \frac{1}{n+1} < 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

qed.

Es gilt (ohne Beweis): $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. $\diamondsuit$

Beispiel: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+k-1)(\alpha+k)}$, $\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots$.
Mittels Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\alpha+k-1} - \frac{1}{\alpha+k}. \\ s_n &= \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} + \cdots + \frac{1}{\alpha+n-1} - \frac{1}{\alpha+n} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+n}, \end{aligned}$$

also $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+k-1)(\alpha+k)} = \frac{1}{\alpha}$. $\diamondsuit$

Beispiel: Die Teleskopreihe: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k = b_k - b_{k+1}$.
Dann ist $s_n = b_1 - b_{n+1}$ und die Reihe konvergiert, falls $\{b_n\}$ für $n \to \infty$ konvergiert. $\diamondsuit$

10.2 Das Rechnen mit Reihen

Rechenregeln für konvergente Reihen

Satz 10.2.1: *Seien* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = t$ *konvergent. Dann gilt*

1. $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = s + t$,
2. $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - b_k) = s - t$,
3. $\sum_{k=1}^{\infty} c a_k = cs, \quad c \in \mathbb{R}$.

Satz 10.2.2: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{r} a_k + \sum_{k=r+1}^{\infty} a_k$, $n \in \mathbb{N}$. *D.h.: Man darf endlich viele Glieder einer Reihe weglassen, den Rest aufsummieren und dann die endlich vielen Glieder wieder hinzuaddieren.*

Beweis: Es seien s_n die Teilsummen von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, und t_n die Teilsummen von

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} a_k, \quad n \geq r+1.$$

Wegen $s_n = \sum_{k=1}^{r} a_k + t_n$ konvergiert $\{t_n\}$ genau dann, wenn $\{s_n\}$ konvergiert und

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{r} a_k + \lim_{n\to\infty} t_n.$$

qed.

Satz 10.2.3: *Faßt man durch Setzen von Klammern jeweils gewisse endlich viele Glieder einer* konvergenten *Reihe zusammen und betrachtet die neue Reihe, deren Glieder die Summen aus den einzelnen Klammern sind, so konvergiert die neue Reihe und hat dieselbe Summe.*

Beweis: Die Partialsummenfolge der neuen Reihe ist eine Teilfolge der Partialsummenfolge der alten Reihe: Mit $n = k_m$ gilt

$$\underbrace{a_1 + \cdots + a_{k_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}}_{b_2} + \cdots + \underbrace{a_{k_{m-1}+1} + \cdots + a_{k_m}}_{b_m} = s_n = t_m.$$

Daraus folgt $\lim\limits_{m\to\infty} t_m = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. qed.

Bemerkung: Entsteht durch Klammernsetzen eine konvergente Reihe, so heißt das nicht, daß die Ausgangsreihe konvergent ist. ♠

Beispiel: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k = 1-1+1-1+1-\cdots$ ist divergent, da $s_{2n}=1$, $s_{2n+1}=0$. Jedoch ist $(1-1)+(1-1)+\cdots = 0+0+\cdots$ konvergent. ♢

Das Konvergenzkriterium von Cauchy für Reihen

Satz 10.2.4: *Die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *ist genau dann konvergent, wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $N(\varepsilon)$ *gibt, so daß für alle* $m,n \geq N(\varepsilon)$ *gilt*

$$|s_n - s_m| < \varepsilon,$$

also $|a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon$.

Beweis: Das Resultat folgt direkt aus dem Konvergenzkriterium von Cauchy, angewendet auf die Folge der Partialsummen. qed.

Beispiel: Die Divergenz der harmonischen Reihe.

$$\begin{aligned} s_{2m} - s_m &= \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{2m} \\ &\geq \underbrace{\frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + \cdots + \cdots \frac{1}{2m}}_{m-\text{mal}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Das Kriterium ist also nicht erfüllt: Für $\varepsilon < \frac{1}{2}$ $\nexists N$, so daß $|s_n - s_m| < \varepsilon$ für $n,m \geq N$. ♢

Aus dem Cauchy'schen Konvergenzkriterium folgt

Satz 10.2.5: *Ist die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Beweis: Zu $\varepsilon > 0 \exists N$, so daß $\forall m,n \geq N$ gilt $|s_m - s_n| < \varepsilon$, also für $m = n+1$, $|a_{n+1}| < \varepsilon$. qed.

Bemerkung: Man sagt: Die Glieder einer konvergenten Reihe bilden eine Nullfolge. Achtung: Diese Behauptung ist *notwendig*, aber nicht hinreichend. ♠

Das Konvergenzkriterium von Leibniz für alternierende Reihen

Definition 10.2.1: *Eine Reihe der Bauart* $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$, *mit* $a_k > 0$ *für* $k = 0, 1, 2, \cdots$ *heißt* alternierende Reihe.

Satz 10.2.6: *Falls die Folge* $\{a_k\}$ *monoton gegen Null strebt, so ist die alternierende Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ *konvergent.*

Bemerkung: Die Voraussetzung der Monotonie ist wichtig ! ♠

Beweis:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k = \overbrace{\overbrace{\overbrace{(a_0 - a_1)}^{s_1} + (a_2 - a_3)}^{s_3} + (a_4 - a_5)}^{s_5} + \cdots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{a_0}_{s_0} - (a_1 - a_2)}_{s_2} - (a_3 - a_4)}_{s_4} - (a_5 - a_6)}_{s_6} - \cdots$$

Also gilt

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \cdots \leq s_{2n-1},$$
$$s_0 \geq s_2 \geq s_4 \geq \cdots \geq s_{2n}.$$

Aus $s_{2n-1} + a_{2n} = s_{2n}$ folgt wegen $a_{2n} > 0$, daß $s_{2n-1} < s_{2n}$ und wegen $s_1 \leq s_{2n-1}$, $s_{2n} \leq s_0$ ist

$$s_1 \leq s_{2n-1} < s_{2n} \leq s_0.$$

Beide Teilsummen konvergieren also. Wegen

$$\lim_{n\to\infty}(s_{2n} - s_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = s.$$

Die Konvergenz der alterniernden Reihe ist also somit bewiesen. qed.

Beispiel: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ ist konvergent mit der Summe $\ln 2$, was später gezeigt wird. ♢

Satz 10.2.7: *Der* Reihenrest $R_n = s - s_n$ *einer alterniernden Reihe erfüllt*

$$|R_n| < a_{n+1}, \quad \mathrm{sign} R_n = (-1)^{n+1}.$$

Beweis: Sei n ungerade. $s = a_0 - a_1 + \cdots - a_n + a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots$, also

$$R_n = a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots = a_{n+1} - a_{n+2} + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots,$$

und da $\{a_n\}$ monoton fallend ist, gilt

$$a_{n+1} - a_{n+2} < R_n < a_{n+1}.$$

qed.

Absolut konvergente Reihen

Definition 10.2.2: *Eine Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *heißt* absolut konvergent*, wenn die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *konvergent ist.*

Satz 10.2.8: *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

Beweis: Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$|a_{n+1} + \cdots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_m|.$$

Ist also das Cauchy'sche Konvergenzkriterium für die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ erfüllt, so ist es auch für die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ gültig. qed.

10.3 Das Vergleichsprinzip

Reihenvergleich

Gegeben seien die Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k, \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ mit positiven Gliedern, also $a_k,\ b_k > 0$. Falls $N_1 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $k \geq N_1$ gilt

$$|c_k| \leq a_k,$$

dann heißt $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *Majorante* der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$. Existiert $N_2 \in \mathbb{N}$, so daß für all $k \geq N_2$ gilt

$$b_k \leq |c_k|,$$

dann heißt $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *Minorante* der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$.

Satz 10.3.9: *Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ ist absolut konvergent, falls eine konvergente Majorante existiert. Sie konvergiert jedoch nicht absolut, falls eine divergente Minorante existiert.*

Der Beweis folgt sofort aus dem Cauchy'chen Konvergenzkriterium.

Beispiel: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$, $\alpha \geq 2$. Wegen $\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{k^2}$ ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ eine konvergente Majorante, also $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$ konvergiert absolut. Für $0 < \alpha < 1$ erhalten wir wegen $\frac{1}{k} < \frac{1}{k^\alpha}$ die divergente Minorante $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$ divergiert also für $0 < \alpha < 1$.

$\diamondsuit$

Das Quotientenkriterium

Satz 10.3.10: *Gilt für die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ab einem gewissen Index N, also für alle $k \geq N$*

1. $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq q < 1$, *so ist die Reihe absolut konvergent.*
2. $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \geq 1$, *so ist die Reihe divergent.*
3. $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq 1$, *jedoch nicht (1), so ist keine Aussage möglich.*

Beweis:

1. Laut Voraussetzung gilt $|\frac{a_{N+1}}{a_N}| \leq q, |\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}| \leq q, \ldots |\frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}}| \leq q, \ldots$, und wir erhalten die Ungleichung $|a_{N+k}| \leq q|a_{N+k-1}| \leq q^2|a_{N+k-2}| \leq \cdots \leq q^k|a_N|$. Setzen wir $b_k = a_{N+k}$, so ist $|b_k| \leq q^k|b_0|$. Da $q < 1$, ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k|b_0|$ eine konvergente Majorante für $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{N+k}$.

2. Aus $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \geq 1$ folgt $|a_{k+1}| \geq |a_k|$. $\{a_k\}$ ist daher keine Nullfolge und wir haben es mit einer divergenten Reihe zu tun.

3. Für die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, $\alpha > 0$ gilt $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| = (\frac{k}{k+1})^\alpha \leq 1$, $k \in \mathbb{N}$. und $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \Big\{\Big(\dfrac{k}{k+1}\Big)^\alpha\Big\} = 1$. Also ist (1) nicht erfüllt. Wir wissen aber bereits, daß die Reihe für $\alpha \leq 1$ divergiert und für $\alpha \geq 2$ konvergiert.

qed.

Die Grenzwertform des Quotientenkriteriums

Satz 10.3.11: *Existiert*

$$\lim_{k\to\infty}\Big|\frac{a_{k+1}}{a_k}\Big| = r,$$

so gilt:

1. *Für $r < 1$ ist die Reihe absolut konvergent,*
2. *für $r > 1$ ist sie divergent,*
3. *für $r = 1$ ist keine Aussage möglich.*

Zum Beweis führt man diese Aussage auf das Quotientenkriterium in der 1. Form zurück.

Beispiel: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$, $x \in \mathbb{R}$. Wir untersuchen die Konvergenz mittels der Grenzwertform:

$$\lim_{k\to\infty}\Big|\frac{a_{k+1}}{a_k}\Big| = \lim_{k\to\infty}\Big|\frac{k+1}{k}\frac{x^k}{x^{k-1}}\Big| = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k}|x| = |x| =: r.$$

Es folgt absolute Konvergenz für $|x| < 1$ und Divergenz für $|x| > 1$. Wie man außerdem leicht sieht, liegt für $|x| = 1$ Divergenz vor. $\diamondsuit$

Beispiel: Für welche x konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + 2x^5 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\Big[3 + (-1)^{k+1}\Big]x^k\,?$$

Die Anwendung des Quotientenkriteriums in der 1.Fassung liefert

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \begin{cases} 2|x|, & k \text{ gerade,} \\ |\frac{x}{2}|, & k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Wegen $\frac{|x|}{2} \leq 2|x| \; \forall x$ gilt $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq 2|x| := q.$$

Es folgt Konvergenz für $|x| < \frac{1}{2}$. ♢

Bemerkung: Für $|x| \geq \frac{1}{2}$ liegt jedoch nicht der Fall (2) vor. Tatsächlich gilt: Die Reihe konvergiert absolut für $|x| < 1$ und sie ist divergent für $|x| \geq 1$. ♠

Wurzelkriterium

Satz 10.3.12: *Gilt für eine Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ab einem gewissen Index, also für* $k \geq N$

1. $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1$, *so ist die Reihe absolut konvergent. Gilt für* $k \geq N$
2. $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$, *so ist die Reihe divergent. Gilt*
3. $\sqrt[k]{|a_k|} \leq 1$, *jedoch nicht (1), so ist keine Aussage möglich.*

Beweis:

1. Aus $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$ folgt $|a_k| \leq q^k$, also ist die geometrische Reihe eine konvergente Majorante.
2. Aus $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ folgt $|a_k| \geq 1$. Daher divergiert die Reihe.
3. Dazu kann man dieselbe Reihe wie beim Quotientenkriterium verwenden.

qed.

Die Grenzwertform des Wurzelkriteriums

Satz 10.3.13: *Existiert*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = r,$$

so gilt :

1. *Für $r < 1$ ist die Reihe absolut konvergent,*
2. *für $r > 1$ ist sie divergent,*
3. *für $r = 1$ ist keine Aussage möglich.*

Der Beweis erfolgt durch Zurückführung auf die 1.Form des Wurzelkriteriums.

Beispiel: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$. Es gilt $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{k}$ und $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$. Also ist die Reihe aufgrund der Grenzwertform des Wurzelkriteriums absolut konvergent. ♢

Beispiel: Wir betrachten nochmals die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + \cdots \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Aus dem Wurzelkriterium ergibt sich für k ungerade : $\sqrt[k]{2|x|^k} = \sqrt[k]{2}|x|$, für k gerade: $\sqrt[k]{|x|^k} = |x|$. Daher folgt $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = |x|$. Die Reihe konvergiert somit absolut für $|x| < 1$. ♢

10.4 Bedingte und unbedingte Konvergenz von Reihen

Definition 10.4.3: *Eine konvergente Reihe heißt* unbedingt konvergent, *wenn durch eine beliebige Umordnung sowohl ihre Konvergenz als auch die Summe erhalten bleiben. Andernfalls heißt die Reihe* bedingt konvergent.

Beispiel: Zu untersuchen ist die Konvergenz der alterniernden harmonischen Reihe:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \cdots$$

Mutliplikation mit $\frac{1}{2}$ liefert

$$\frac{1}{2}\ln 2 = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \cdots$$

Addieren wir die beiden Reihen, so erhalten wir

$$\frac{3}{2}\ln 2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \cdots .$$

Diese Reihe ist aber nur eine Umordnung der ursprünglichen Reihe für $\ln 2$. Es folgt immer auf 2 positive Glieder ein negatives. Die Reihe ist also nur bedingt konvergent. $\diamondsuit$

Satz 10.4.14: *Eine Reihe ist genau dann unbedingt konvergent, wenn sie absolut konvergent ist.*

Beweis:

1. Wir nehmen an, die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sei absolut konvergent und wollen zeigen, daß dann auch jede Umformung $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert und zwar mit derselben Summe. D.h., daß die Differenzenfolge, die aus den Partialsummen s_n und t_n der Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ gebildet wird, eine Nullfolge sein muß. Zum Beweis: Man wähle eine beliebige Zahl n_0. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n_1 = n_1(n_0)$, so daß für $n \geq n_1$ in $s_n - t_n$ nur Glieder von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ vorkommen, deren Index größer oder gleich n_0 ist. Sei $\overline{n}_0$ der größte Index, der in der Partialsumme t_n vorkommenden Glieder. Dann kann die Differenz $s_n - t_n$ folgend abgeschätzt werden

   $$|s_n - t_n| \leq \sum_{k=n_0}^{\overline{n}_0} |a_k|.$$

   Aufgrund des Cauchy'schen Konvergenzkriteriums wird diese Summe kleiner als jede beliebige Zahl $\varepsilon > 0$, falls $n_0 \geq N(\varepsilon)$ hinreichend groß ist. Damit gilt

   $$|s_n - t_n| < \varepsilon, \quad n \geq n_1,$$

   also ist $\{s_n - t_n\}$ Nullfolge. Damit haben wir bewiesen, daß eine absolut konvergente Reihe unbedingt konvergent ist.

2. Nun soll auch gezeigt werden, daß eine nicht absolut konvergente nur bedingt konvergieren kann. Vorbemerkungen: Da eine Reihe genau dann absolut konvergiert, wenn die Reihe der Beträge ihrer Glieder konvergiert, kann nur eine Reihe mit unendlich vielen positiven *und* negativen Gliedern konvergent, aber nicht absolut konvergent sein. Reihen mit endlich

vielen negativen oder endlich vielen positiven Gliedern sind entweder absolut konvergent (wenn ihre Partialsummen beschränkt sind), oder divergent. Wir betrachten nun die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit den positiven Gliedern $p_1, p_2, \cdots$ und den negativen Gliedern $-q_1, -q_2, \cdots$. Unter der Voraussetzung, daß sie konvergent, aber nicht absolut konvergent ist, müssen wir annehmen, daß unendlich viele positive und negative Glieder vorkommen und die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} p_k, \sum_{k=1}^{\infty} q_k$ divergieren. Zum Beweis: Nun läßt sich eine Teilfolge $\{n_k\}$ der natürlichen Zahlen so wählen, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ umgeordnet werden kann zu

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} b_k &= p_1 + \cdots + p_{n_1} - q_1 + p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_2} - q_2 + \cdots \\ &\quad + p_{n_k+1} + \cdots + p_{n_k+1} - q_{k+1} + \cdots,\end{aligned}$$

mit der Eigenschaft, daß

$$\sigma_m = \sum_{k=1}^{m} (p_{n_k+1} + \cdots + p_{n_{k+1}} - q_{k+1}) > m, \quad m = 1, 2, \cdots.$$

Also divergiert die Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist daher nur bedingt konvergent.

qed.

Beispiel: Jetzt können wir die bedingte Konvergenz von

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

dadurch erklären, daß die Summen

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} q_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots$$

bestimmt divergieren. ◊

Umordnung mit Grenzwert A

Gegeben sei die bedingt konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $A \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gibt es eine Umordnung der Reihe, die gegen A konvergiert:

1. Man nehme gerade soviele positive Glieder, daß ihre Summe $> A$ ist,
2. gebe gerade soviele negative Glieder dazu, daß die Gesamtsumme $< A$ ist,
3. addiere wieder gerade soviele positive Glieder, daß die Gesamtsumme $> A$ ist, u.s.w.

Da $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = 0$ und $\lim\limits_{k\to\infty} q_k = 0$ werden die Annäherungen an$A$ immer genauer, und wir erhalten Konvergenz gegen A.

10.5 Die Multiplikation von Reihen

Satz 10.5.15: *Die Reihen* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = a$ *und* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k = b$ *seien absolut konvergent. Wir bilden die Reihe mit dem allgemeinen Glied*

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ *absolut, mit der Summe* $c = ab$.

Erklärung des Multiplikationsschemas

Multiplikation von $(a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots)$ mit $(b_0+b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n+\cdots)$ ergibt

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & a_0b_0 & + & a_0b_1 & + & a_0b_2 & + & a_0b_3 & + & \cdots & + \\
 & & \swarrow\!\!\!\nearrow & & \swarrow\!\!\!\nearrow & & \swarrow\!\!\!\nearrow & & & & \\
+ & a_1b_0 & + & a_1b_1 & + & a_1b_2 & + & a_1b_3 & + & \cdots & + \\
 & & \swarrow\!\!\!\nearrow & & \swarrow\!\!\!\nearrow & & & & & & \\
+ & a_2b_0 & + & a_2b_1 & + & a_2b_2 & + & a_2b_3 & + & \cdots & + \\
 & & \swarrow\!\!\!\nearrow & & & & & & & & \\
+ & a_3b_0 & + & a_3b_1 & + & \cdots & + & & & & \\
 & \vdots & & \vdots & & & & & & &
\end{array}$$

Die Reihe ensteht dadurch, daß man die Glieder $a_i b_j$ längs der Diagonalen wie angezeigt zusammenfaßt:

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0 b_0, \\
c_1 &= a_1 b_0 + a_0 b_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2, \\ c_3 &= a_3b_0 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_0b_3 \\ &\vdots \\ c_k &= a_kb_0 + a_{k-1}b_1 + \cdots + a_0b_k. \end{aligned}$$

Die so erhaltene Reihe heißt *Cauchy'sche Produktreihe.*

Beweis:

1. Die Cauchy'sche Produktreihe hat die Form
$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k} a_{k-l}b_l.$$
Es gilt
$$\sum_{k=0}^{n}\Big|\sum_{l=0}^{k} a_{k-l}b_l\Big| \leq \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k} |a_{k-l}b_l| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \sum_{l=0}^{n} |b_l| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \sum_{l=0}^{\infty} |b_l|.$$
Damit haben wir gezeigt, daß aus der absoluten Konvergenz der beiden Reihen $\sum a_k$ und $\sum b_k$ die absolute Konvergenz von $\sum c_k$ folgt.

2. Die Partialsummen der Reihen $\sum a_k$ und $\sum b_k$ seien s_n und t_n. Ihre Produktfolge $\{s_nt_n\}$ konvergiert gegen ab. Wir ordnen nun die Cauchy'sche Produktreihe so um, daß $\{s_nt_n\}$ Teilfolge der Partialsummenfolge der umgeordneten Reihe wird, die dann ebenfalls die Summe ab hat. Wegen der absoluten Konvergenz hat somit auch die Cauchy'sche Produktreihe die Summe ab.

qed.

Beispiel: Wir betrachten die Reihe (vgl. Abschnitt 12.4)
$$s(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$
Da
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
konvergiert diese Reihe aufgrund des Quotientenkriteriums $\forall x \in \mathbb{R}$ absolut. Wir bilden nun die Produktreihe
$$\begin{aligned} s(x)s(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}\binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Anwendung des binomische Lehrsatzes liefert

$$s(x)s(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = s(x+y).$$

Mittels dieser Produktbildung haben wir also das Multiplikationstheorem bestätigt.

$\diamondsuit$

10.6 Reihen mit komplexen Gliedern

Eine Reihe mit komplexen Gliedern hat die folgende Gestalt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k + iy_k).$$

So eine Reihe heißt *konvergent*, wenn der Grenzwert ihrer Partialsummenfolge

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k + i \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} y_k$$

existiert. Andernfalls heißt sie *divergent*. Eine komplexe Reihe konvergiert also genau dann, wenn die Reihe der Realteile $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ und die Reihe der Imaginärteile $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ konvergieren. Für Reihen mit komplexen Gliedern gelten dieselben Gesetzmäßigkeiten wie für Reihen mit reellen Gliedern. Hinsichtlich der Konvergenz gilt: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|$ konvergiert genau dann, wenn $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |y_k|$ konvergieren. Die absolute Konvergenz einer komplexen Reihe ist also gleichbedeutend mit der absoluten Konvergenz der Reihe der Realteile und der Reihe der Imaginärteile.

Kapitel 11

Funktionenfolgen und Funktionenreihen

11.1 Konvergenzkonzepte

Gegeben seien Funktionen $f_n : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann nennt man die Folge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine *Funktionenfolge.*

Definition 11.1.1:

1. *Existiert* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\xi)$ *für* $\xi \in J$, *so heißt* $\{f_n\}$ *an der Stelle* ξ konvergent. *Konvergiert* $\{f_n\}$ *an* x *für alle* $x \in I \subseteq J$, *so heißt* $\{f_n\}$ punktweise konvergent in I *und es existiert eine* Grenzfunktion $f : I \to \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in I.$$

2. *Die Funktionenfolge* $\{f_n\}$ *heißt* gleichmäßig konvergent *auf* I *gegen die Funktion* f, *wenn*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0\,.$$

   Offensichtlich folgt aus gleichmäßiger die punktweise Konvergenz.

Beispiel: Sei $f_n(x) = x^n$: $J = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} \,.$$

Für $x \le -1$ und für $x > 1$ divergiert $\{x^n\}$. Folglich konvergiert $\{f_n\}$ punktweise in $I = (-1, 1]$ gegen die Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} .$$

Wegen

$$\sup_{-1<x\le 1} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{-1<x<1} |x|^n = 1\,,$$

ist $\{f_n\}$ auf $(-1, 1]$ nicht gleichmäßig konvergent. Das Problem liegt offensichtlich in der Nähe der Punkte $x = -1$ und $x = 1$. Man beachte allerdings, daß $\{f_n\}$ auch auf dem offenen Intervall $(-1, 1)$ nicht gleichmäßig konvergiert, sehr wohl aber auf Intervallen der Form $[a, b]$ mit $-1 < a \le b < 1$. ♢

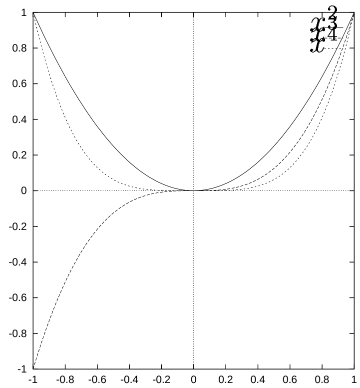

Abbildung 11.1: Funktionenfolge: x^2, x^3, x^4

Wir nennen

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

eine *Funktionenreihe*, und

$$s_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

ihre N*-te Partialsumme*. Die Konvergenz einer Funktionenreihe wird mittels der Konvergenz ihrer Partialsummen erklärt. Konvergiert eine Funktionenreihe punktweise in I, so ist ihre Summe $f : I \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \lim_{N\to\infty} s_N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Man nennt dann $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ eine *Reihenentwicklung von f auf dem Intervall I*. Die Reihe konvergiert *absolut*, wenn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ konvergiert.

Sei die Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ ein Kandidat für die Summe der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ in I. Dann ist der *Reihenrest* definiert durch

$$R_{N+1}(x) = f(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) = f(x) - s_N(x)$$

Die Reihenreste bilden die Funktionenfolge $\{R_N\}$. Punktweise (gleichmäßige) Konvergenz der Reihe gegen f ist gleichbedeutend mit punktweiser (gleichmäßiger) Konvergenz der Reihenreste gegen null.

Beispiel: Sei wieder $f_n(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. Dann erhalten wir die geometrische Reihe, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$. Für $|x| < 1$ konvergiert die Reihe bekanntlich, für $|x| \geq 1$ divergiert sie. Auf $(-1, +1)$ existiert also eine Grenzfunktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Auf diesem Intervall hat daher $f(x)$ die Reihenentwicklung $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$. Bekanntlich konvergiert die Reihe auf $(-1, 1)$ absolut.

Gleichmäßige Konvergenz: Für $-1 < x < 1$ ist der Reihenrest gegeben durch

$$R_N(x) = \sum_{n=N}^{\infty} x^n = x^N \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x^N}{1-x}.$$

Wir wählen $I = [-d, +d]$ mit $0 < d < 1$: Dann gilt

$$\sup_{-d \leq x \leq d} |R_n(x)| = \frac{d^n}{1-d}.$$

Daraus folgt gleichmäßige Konvergenz auf $[-d, d]$. Die Reihe konvergiert jedoch nicht gleichmäßig auf $(-1, 1)$. Man beachte, daß $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $R_n(0) = 0$ und $\lim\limits_{x \to 1-} R_n(x) = \infty$. $\diamondsuit$

Eine in manchen Fällen einfache Methode, gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen festzustellen, liefert der folgende Satz.

Satz 11.1.1: *Es gelte $|f_n(x)| \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in I$, wobei die Reihe mit konstanten Gliedern $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Dann konvergiert die Funktionenreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ absolut und gleichmäßig in I.*

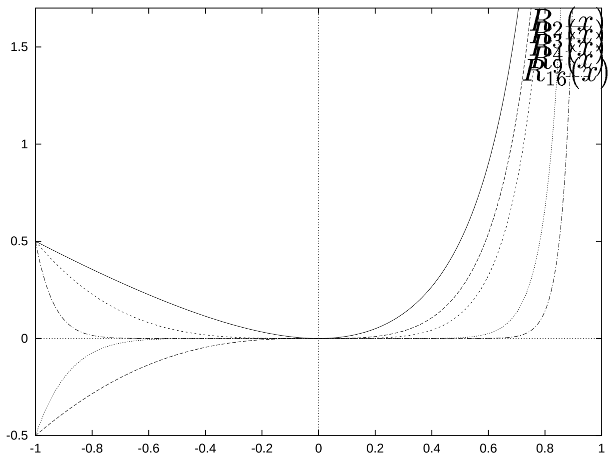

Abbildung 11.2: Reihenrest der geometrischen Reihe

Beweis: Für $x \in I$ gilt

$$|R_N(x)| = \left| \sum_{n=N}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=N}^{\infty} a_n \,,$$

und daher

$$\sup_{x \in I} |R_N(x)| \leq \sum_{n=N}^{\infty} a_n \,.$$

Die rechte Seite ist der Reihenrest für die laut Annahme konvergente Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und konvergiert daher für $N \to \infty$ gegen null. Damit ist die gleichmäßige Konvergenz bewiesen. Absolute Konvergenz folgt ebenso aus der obigen Abschätzung. qed.

Beispiel: Für die geometrische Reihe gilt offensichtlich

$$|x^n| \leq d^n = a_n \,, \qquad \text{für } -d \leq x \leq d \,.$$

Mit Hilfe des Satzes folgt daher die gleichmäßige Konvergenz auf $[-d, d]$ für $0 < d < 1$. ♢

11.2 Gleichmäßig konvergente Funktionenreihen

Es folgen drei wichtige Aussagen über Funktionenreihen, in denen die besondere Bedeutung des Begriffes der *gleichmäßigen Konvergenz* zum Ausdruck kommt.

1) *Stetigkeit der Summenfunktion:*

Satz 11.2.2: *Sind die Funktionen $f_n(x)$, $n = 1, 2, \cdots$, stetig auf $[a, b]$ und ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ gleichmäßig konvergent auf $[a, b]$, so ist auch die Summenfunktion $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stetig auf $[a, b]$.* Für einen Beweis dieses Resultates verweisen wir auf die Vorlesung „Höhere Analysis".

2) *Die Integration unendlicher Reihen*

Satz 11.2.3: *Unter den Voraussetzungen des obigen Satzes ist für jedes $x \in [a, b]$*

$$\int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)ds = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(s)ds\,,$$

d.h. man darf eine gleichmäßig konvergente Funktionenreihe gliedweise integrieren und erhält dadurch eine Reihe, die gleichmäßig gegen das Integral der Summenfunktion konvergiert.

Beweis:

$$\left|\int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)ds - \sum_{n=1}^{N} \int_a^x f_n(s)ds\right| \le \int_a^x \left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(s) - \sum_{n=1}^{N} f_n(s)\right| ds$$
$$= \int_a^x |R_{N+1}(s)|ds \le (b-a) \sup_{a \le x \le b} |R_{N+1}(x)|\,.$$

qed.

3) *Die Differentiation unendlicher Reihen*

Der Satz, daß die Ableitung einer (endlichen) Summe gleich der Summe der Ableitungen ist, läßt sich nicht einmal auf gleichmäßig konvergente Reihen übertragen. Es gilt nur

Satz 11.2.4: *Die Funktionen $f_n(x)$, $n = 1, 2, \cdots$ seien alle auf $[a, b]$ differenzierbar, und die abgeleitete Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$ sei gleichmäßig konvergent auf $[a, b]$. Ist dann die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ wenigstens an einem Punkt $x_0 \in [a, b]$ konvergent, so konvergiert sie sogar gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen eine differenzierbare Funktion, und es gilt*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'\,,$$

also sind unter der Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz der durch gliedweise Differentiation entstehenden Reihe Differentiations- und Summenzeichen vertauschbar.

Beweis: Wir können auf die gliedweise differenzierte Reihe den vorherigen Satz anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(s)ds &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(s)ds = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x) - f_n(x_0)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)\,,\end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Gleichung die Konvergenz der Funktionenreihe an x_0 verwendet haben. Ableitung der obigen Gleichung vollendet den Beweis. qed.

Kapitel 12

Potenzreihen

12.1 Einführung

Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine reelle Zahlenfolge. Dann nennt man

$$p(x - x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

eine *reelle Potenzreihe* mit der *Anschlußstelle* x_0. Übergang in das Komplexe: Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine komplexe Zahlenfolge. Dann heißt

$$p(z - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z_0, z \in \mathbb{C}$$

komplexe Potenzreihe mit der *Anschlußstelle* z_0. Konvergiert $p(z - z_0)$ für $z \in G \subseteq \mathbb{C}$, dann ist durch $p(z - z_0)$ eine komplexwertige Funktion der komplexen Veränderlichen z definiert.

Satz 12.1.1: *Für eine komplexe Potenzreihe der Gestalt*

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

gilt eine der folgenden Aussagen:

1. *Die Reihe konvergiert nur für $z = 0$.*

2. *Die Reihe konvergiert absolut für alle z.*

3. *Es gibt eine Zahl $R > 0$, so daß die Reihe absolut konvergiert für $|z| < R$ und divergiert für $|z| > R$.*

Die Konvergenz ist gleichmäßig für $|z| \leq p$ mit p beliebig im Fall (2) und $p < R$ im Fall (3).

Beweis: Sei $R = \sup \left\{ |z| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ konvergiert} \right\}$ ($R = \infty$ erlaubt). Dann divergiert die Potenzreihe natürlich für $|z| > R$. Für $|z| < R$ existiert ein $\tilde{z}$ mit $|z| < |\tilde{z}| < R$, sodaß die Potenzreihe an $\tilde{z}$ konvergiert. Es folgt

$$|a_n z^n| \leq |a_n \tilde{z}^n| \left| \frac{z}{\tilde{z}} \right|^n ,$$

wobei $|a_n \tilde{z}^n| \leq M$ wegen $\lim_{n\to\infty} a_n \tilde{z}^n = 0$ gilt. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} M q^n$ mit $q = |z/\tilde{z}| < 1$ ist eine konvergente Majorante für die Potenzreihe an der Stelle z, woraus die absolute Konvergenz für $|z| < R$ folgt.

Sei nun $0 < p < R$ und $p < |\tilde{z}| < R$. Dann gilt für $|z| \leq p$ die Abschätzung $|a_n z^n| \leq M q^n$ mit $q = p/|\tilde{z}| < 1$, was mit Hilfe von Satz 11.1.1 die gleichmäßige Konvergenz für $|z| \leq p$ impliziert. qed.

R heißt der *Konvergenzradius* der Reihe. Wir nennen die Menge $\{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$ den *Konvergenzkreis* und $\{z \in \mathbb{C}; |z| = R\}$ den Rand des Konvergenzkreises.

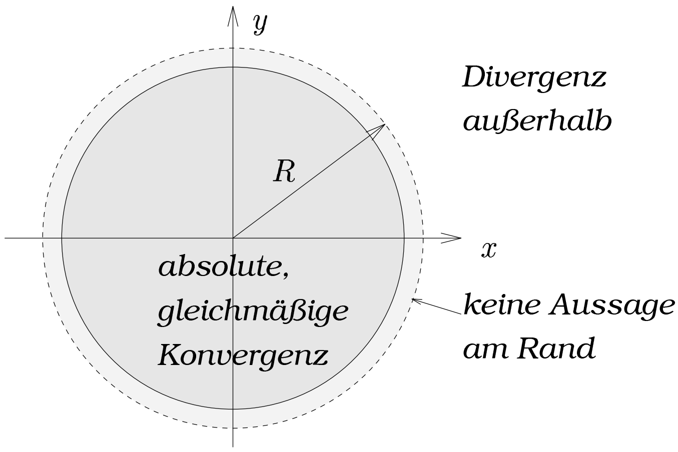

Abbildung 12.1: Konvergenzbereiche

Bestimmung des Konvergenzradius

Satz 12.1.2: *Für den Konvergenzradius R der komplexen Potenzreihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ *gilt*

$$\text{(1)}\quad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \qquad \textit{falls} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R}_+ ,$$

$$R = \infty, \qquad \textit{falls} \quad \lim \sqrt[n]{|a_n|} = 0,$$

$$R = 0, \qquad \textit{falls} \quad \left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\} \ \textit{unbeschränkt ist.}$$

sowie

$$\text{(2)}\quad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right|}, \qquad \textit{falls} \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \in \mathbb{R}_+ ,$$

$$R = \infty, \qquad \textit{falls} \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$$

$$R = 0, \qquad \textit{falls} \quad \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} \ \textit{unbeschränkt ist.}$$

Beweis:

1. Wir verwenden das Wurzelkriterium für komplexe Reihen: Sei $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, $c_n \in \mathbb{C}$ gegeben. Existiert $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = r$, so ist die Reihe für $r < 1$ absolut konvergent, für $r > 1$ divergent. Für $r = 1$ ist keine Aussage möglich. Nun setzen wir $c_n = a_n z^n$ Dann ist
$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt{|a_n|}|z|$$
und
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{|a_n|}|z| = |z| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$
Das Wurzelkriterium liefert jetzt das Resultat.

2. Da $\{ \sqrt[n]{|a_n|} \}$ nicht beschränkt ist, kann daher auch $\{|a_n|\}$ nicht beschränkt sein und wegen
$$\sqrt[n]{|a_n z^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}|z|$$
gilt dies ebenso für die Folge $\{ \sqrt[n]{|a_n z^n|} \}$. Daher ist $\{|a_n z^n|\}$ nicht beschränkt.

qed.

Beispiel: Sei $p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$. Dann erhalten wir mit

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

den Konvergenzradius $R = 1$; also Konvergenz für $|z| < 1$, Divergenz für $|z| > 1$. Am Rand divergiert die Potenzreihe für $z = 1$, sie konvergiert für $z = -1$. Als reelle Reihe konvergiert $p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ für $x \in [-1, 1)$. $\diamondsuit$

12.2 Das Rechnen mit Potenzreihen

Gegeben seien zwei Potenzreihen

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ mit } R_1 > 0, \\ f_2(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \text{ mit } R_2 > 0 \end{aligned}$$

mit den Konvergenzradien R_1 und R_2. Sei $r = \min\{R_1, R_2\}$. Dann gelten folgende Rechenregeln:

1) *Linearkombination*: $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\alpha f_1(z) + \beta f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) z^n, \quad \text{für} \quad |z| < r.$$

Für den Konvergenzradius R der Reihe auf der rechten Seite gilt: $R \geq r$.

2) *Produktbildung*:

$$f_1(z) \cdot f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad \text{für} \quad |z| < r$$

wobei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ die Cauchy'sche Produktreihe von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ darstellt. Für den Konvergenzradius R gilt ebenfalls: $R \geq r$.

3) *Division*: Der Quotient

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$$

ist definiert, falls $b_0 \neq 0$. Es wird zuerst der Ansatz

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

gemacht. Dann wird die Beziehung

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ausmultipliziert und die c_n, $n = 0, 1, \ldots$, werden durch Koeffizientenvergleich rekursiv bestimmt. Für den Konvergenzradius R gilt: $R > 0$.

4) *Integration und Differentiation:*

Satz 12.2.3: *Die reelle Potenzreihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *konvergiere auf* $I = \{x : |x - x_0| < R\}$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. *Dann gilt*

1. $f(x)$ *ist differenzierbar (daher auch stetig) auf* I *und* $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$, $x \in I$.
2. $\int f(x)dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1} + C$, $x \in I$.

Beispiel: Sei $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in I = (-1, 1)$. Dann gilt für die Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, \quad x \in I,$$

und für das Integral

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad x \in I.$$

$\diamondsuit$

Aus dem obigen folgt unmittelbar:

Satz 12.2.4: *Die Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *konvergiere auf dem Intervall* I *gegen die Funktion* $f(x)$. *Dann gilt*

1. *f ist beliebig oft differenzierbar auf I*

2. $$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

3. $$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Damit ist gezeigt, daß die Potenzreihenentwicklung einer Funktion eindeutig ist. Mittels dieser Beziehung kann man jeder Funktion $f(x)$, die an der Stelle x_0 beliebig oft differenzierbar ist, formal eine Potenzreihe zuordnen:

$$f(x) \quad \to \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Diese Reihe nennt man die *Taylorreihe von f mit der Anschlußstelle x_0*. Das folgende Beispiel zeigt, daß die Summe der Taylorreihe an einer Stelle x (auch wenn sie konvergiert) nicht unbedingt gleich $f(x)$ sein muß.

Beispiel: $f(x) = e^{-1/x^2}$. Es gilt $f^{(n)}(0) = 0$ und somit $a_n = 0$ für $n = 0, 1, \ldots$.

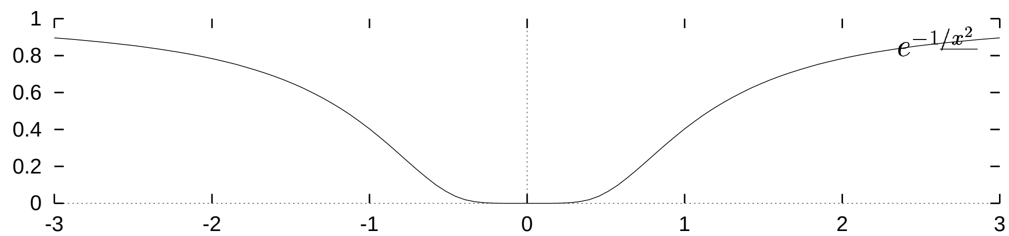

Abbildung 12.2: $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

Also $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv 0$, und somit

$$f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \neq 0.$$

Diese Potenzreihe ist zwar konvergent, aber nicht gegen $f(x)$. $\diamondsuit$

12.3 Der Taylorsche Lehrsatz

Satz 12.3.5: *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$ - mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle $x_0 \in [a,b]$ und $x \in [a,b]$ die Taylorsche Formel:*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}(x) \end{aligned}$$

mit

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

($R_{n+1} \ldots$ Restglied der Ordnung $n+1$)

Beweis: (induktiv) Für $n = 0$ gilt nach dem 2. Hauptsatz der Integralrechnung

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt.$$

Also

$$R_1(x) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt.$$

Gehen wir nun von n auf $n+1$ über, so erhalten wir

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)dt = \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)\frac{d}{dt}\Big[-\frac{(x-t)^n}{n!}\Big]dt \\ &= -f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt \\ &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt. \end{aligned}$$

qed.

Definition 12.3.1:

$$p_n(x) := \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

heißt n - tes Taylorpolynom der Funktion f *(mit Anschlußstelle x_0), $R_{n+1}(x)$ heißt das* Restglied $(n+1)$ *- ter Ordnung.*

Mittelwertdarstellung des Restgliedes nach Lagrange

Satz 12.3.6: *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$ - mal stetig differenzierbare Funktion. Dann kann das Restglied folgend dargestellt werden:*

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}[x_0 + \vartheta(x - x_0)]}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad \vartheta \in (0,1).$$

Beweis: Aufgrund des 2. Mittelwertsatzes der Integralrechnung gilt

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}[x_0 + \vartheta(x - x_0)]\int_{x_0}^{x}(x-t)^n dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}[x_0 + \vartheta(x_0 - x)]}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad 0 \le \vartheta \le 1. \end{aligned}$$

qed.

12.4 Taylorreihen der elementaren Funktionen

1. Die Exponentialfunktion

Wir werden jetzt die Taylorreihe der Funktion

$$f(x) = e^x$$

für $x_0 = 0$ herleiten. Wir erhalten

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad f^{(n)}(0) = 1, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = \frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

und damit ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

die Taylorreihe von e^x. Die Konvergenz ist noch zu überprüfen!

1. Der Konvergenzradius ist unendlich, da $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$

2. Für das Restglied gilt $R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\vartheta x}$, $0 \le \vartheta \le 1$, also
$$|R_{n+1}(x)| \le \frac{|x|^{n+1}e^{|x|}}{(n+1)!}.$$
Sei $m > 2|x|$. Für $n \ge m$ gilt $\frac{|x|}{n} < \frac{1}{2}$, daher
$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|^m}{m!}\frac{|x|}{m+1}\frac{|x|}{m+2}\cdots\frac{|x|}{n+1} < \frac{|x|^m}{m!}\frac{1}{2^{n+1-m}} = \frac{|2x|^m}{m!}\frac{1}{2^{n+1}}.$$
Dieser Ausdruck konvergiert gegen 0 für $n \to \infty$ und somit konvergiert auch das Restglied gegen null.

Daher können wir schreiben
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$
In Abschnitt 10.5 haben wir das Multiplikationstheorem $e^{x+y} = e^x e^y$ bewiesen.

2. Die trigonometrischen Funktionen

Für die Ableitungen von $f(x) = \sin x$ gilt
$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x, \\ f''(x) &= -\sin x, \\ f'''(x) &= -\cos x, \\ f^{\mathrm{IV}}(x) &= \sin x, \\ &\vdots \end{aligned}$$
und für $x_0 = 0$
$$f'(x_0) = 1, \quad f''(x_0) = 0, \quad f'''(x_0) = -1 \quad f^{\mathrm{IV}}(x_0) = 0, \quad \ldots.$$
Ebenso für $f(x) = \cos x$ gilt
$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x, \\ f''(x) &= -\cos x, \\ f'''(x) &= \sin x, \\ f^{\mathrm{IV}}(x) &= \cos x, \\ &\vdots \end{aligned}$$

und

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) = -1, \quad f'''(x_0) = 0 \quad f^{\mathrm{IV}}(x_0) = 1, \quad \ldots .$$

Wir erhalten damit die Taylorreihen

$$\begin{aligned} \sin x &\to x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots , \\ \cos x &\to 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots , \end{aligned}$$

und da die Reihen für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergieren (Beweis analog zur Exponentialfunktion), können wir für $x \in \mathbb{R}$ schreiben:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^n.$$

Beispiel: Graphische Darstellung der Taylorpolynome für $f(x) = \sin x$ (siehe Abb. 12.3). Wir untersuchen den Fehler von $p_9(x)$ am Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$: Da $p_9(x) =$

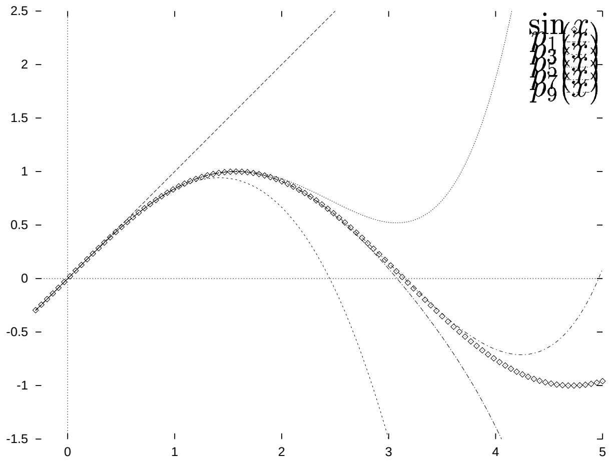

Abbildung 12.3: Graphische Darstellung der Taylorpolynome für $f(x) = \sin x$

$p_{10}(x)$ betrachten wir erst R_{11}:

$$|R_{11}(x)| \le \frac{x^{11}}{11!} \le \frac{\pi^{11}}{2^{11} 11!} \cong 3,6.10^{-6}.$$

$\diamondsuit$

3. Die Hyperbelfunktionen

Wir bilden wieder die Ableitungen $f^{(n)}(x)$. Für $f(x) = \sinh x$ erhalten wir:

$$f'(x) = \cosh x, \quad f''(x) = \sinh x, \ldots$$

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \ldots$$

und analog für $\cosh x$. Daher gilt für $x \in \mathbb{R}$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

was man natürlich auch aus der Taylorreihe von e^x erhalten kann.

4. Der natürliche Logarithmus

Die Ableitungen von $f(x) = \ln x$ lauten

$$\frac{1}{x}, \quad -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{2}{x^3}, \quad -\frac{2.3}{x^4}, \text{ u.s.w.},$$

allgemein

$$\frac{d^n \ln x}{dx^n} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

Damit erhalten wir (Anschlußstelle $x_0 = 1$)

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n.$$

Durch den Übergang von x zu $x+1$ wird daraus die Taylorreihe für $\ln(1+x)$ mit Anschlußstelle $x_0 = 0$.

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

(vergleiche mit Abschnitt 12.2). Für den Konvergenzradius erhalten wir

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{n}{n+1} \right|} = 1,$$

was zu erwarten war, weil $\ln x$ eine Singularität bei $x = 0$ hat. Also konvergiert diese Reihe höchstens für $|x| < 1$ und mittels einer Restgliedabschätzung zeigt man, daß sie für $|x| < 1$ tatsächlich gegen $\ln(1+x)$ konvergiert. Mit

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

und

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots$$

erhalten wir die Taylorreihe

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\Big(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\Big),$$

und diese Reihe konvergiert für $|x| < 1$. Für jede reelle Zahl $a > 0$ gilt

$$a = \frac{1+x}{1-x} \text{ mit } x = \frac{a-1}{a+1}, \quad |x| < 1.$$

Daher kann mittels dieser Reihe $\ln a$ für alle $a > 0$ ausgewertet werden.

5. $f(x) = \arctan x$

Aus der geometrischen Reihe folgt

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

Durch gliedweises Integrieren erhält man

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots.$$

Diese Reihe konvergiert für $-1 \leq x \leq 1$ und man darf daher schreiben

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}.$$

Für $x = 1$ erhält man die *Leibniz'sche Reihe*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

6. Die binomische Reihe

Für $f(x) = (1+x)^a$, $a \in \mathbb{R}$, erhalten wir die Ableitungen

$$f^{(n)}(x) = a(a-1)\cdots(a-n+1)(1+x)^{a-n}.$$

Dann gilt

$$(1+x)^a \to \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n, \qquad \binom{a}{n} := \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}.$$

Die Reihe konvergiert für $|x| < 1$ und zwar gegen $f(x)$. Daher gilt (in Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatzes)

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n, \quad |x| < 1.$$

Zusammenfassung

Taylorreihen der elementaren Funktionen:

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R} \\
\sinh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R} \\
\cosh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R} \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, \quad x \in \mathbb{R} \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \quad x \in \mathbb{R} \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots, \quad |x| < 1, \\
\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
&= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right), \quad |x| < 1 \\
\arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, |x| < 1 \\
(1+x)^a &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n, \quad |x| < 1, \quad \binom{a}{n} := \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}.
\end{aligned}$$

Die Reihenmethode für unbestimmte Formen

Eine einfach Anwendung der Taylorreihen ist die Untersuchung unbestimmter Formen. Dabei wird jede der auftretenden elementaren Funktionen durch eine geeignete Anzahl von Termen ihrer Taylorreihe plus einem Fehlerterm, der am besten in $O(x^n)$-Notation angeschrieben wird, ersetzt. Falls sich der „unbestimmte Anteil wegkürzt“, kann man den Grenzwert direkt ablesen.

Beispiel: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$.

$$\begin{aligned}
1-\cos x &= 1-(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cdots) = x^2(\frac{1}{2}+O(x^2)),\\
\sin^2 x &= \left(x-\frac{x^3}{6}+\cdots\right)^2 = x^2\left(1-\frac{x^2}{6}+\cdots\right)^2 = x^2(1+O(x^2)).
\end{aligned}$$

Also gilt $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1/2+O(x^2)}{1+O(x^2)} = \dfrac{1}{2}$. In diesem Beispiel kürzt man im Zähler und im Nenner jeweils den Faktor x^2. Das erklärt auch, warum man bei der Lösung mittels der Regel von de l'Hospital den Zähler und den Nenner zweimal differenzieren muß. ♢

Komplexe Taylorreihen

Die Taylorreihen der elementaren Funktionen können dazu benutzt werden, die elementaren Funktionen in die komplexen Zahlen fortzusetzen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
e^z &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = 1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots, \quad z\in\mathbb{C}\\
\sinh z &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5}+\cdots, \quad z\in\mathbb{C}\\
\cosh z &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots, \quad z\in\mathbb{C}\\
\sin z &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots, \quad z\in\mathbb{C}\\
\cos z &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots, \quad z\in\mathbb{C}\\
\ln(1+z) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} = z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots, \quad |z|<1,\\
\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) &= \ln(1+z)-\ln(1-z) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}\\
&= 2\left(z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\cdots\right), \quad |z|<1\\
\arctan z &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1} = z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\cdots, |z|<1
\end{aligned}$$

$$(1+z)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} z^n, \quad |z| < 1, \quad \binom{a}{n} := \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}.$$

Aus diesen Reihendarstellungen folgen die wichtigen Beziehungen:

$$e^{iz} = cosz + isinz, \quad z \in \mathbb{C}$$

und

$$e^{ix} = cosx + isinx, \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

Wenn man $x = \pi$ setzt, so folgt die von *Euler* entdeckte Formel

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

die in bemerkenswerter Weise alle wesentlichen Zahlen der Mathematik in einer Gleichung verbindet.